Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH
ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH
FELIX KLEIN · DAVID HILBERT · OTTO BLUMENTHAL · ERICH HECKE

142. BAND · 5. (SCHLUSS-) HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 15. FEBRUAR 1961)

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1961

Math.
Ann.

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch *Alfred Clebsch* und *Carl Neumann*, früher herausgegeben von *Alfred Clebsch* (1869—1872), *Carl Neumann* (1869—1876), *Felix Klein* (1876—1924), *Adolph Mayer* (1876—1901), *Walther v. Dyck* (1888—1921), *David Hilbert* (1902—1939), *Otto Blumenthal* (1906—1938), *Albert Einstein* (1920—1928), *Constantin Carathéodory* (1925—1928), *Erich Hecke* (1929—1947), *Franz Rellich* (1947—1955).

Band 1—80 Leipzig, B. G. Teubner, ab Band 81 (1920) Berlin, Springer.

An unsere Mitarbeiter!

Die Korrekturkosten sind bei den „Mathematischen Annalen" sehr hoch. Sie betragen nach einer Kalkulation 6% des Gestehungspreises eines Bandes. Für ihre Verminderung muß unbedingt Sorge getragen werden. Wir richten deshalb an alle unsere Mitarbeiter die freundliche dringende Bitte, zu diesem Ziele an ihrem Teile mit beitragen zu wollen. Dazu ist nötig:

1. Das Manuskript muß *völlig druckfertig* und *gut leserlich* sein (Schreibmaschine oder klare Handschrift, Formeln im allgemeinen handschriftlich). Vorkommende gotische oder griechische Buchstaben sowie einander ähnelnde Zeichen sind besonders zu kennzeichnen, z. B. durch farbige Unterstreichung. Etwaige Abbildungen sind als Skizzen auf besonderen Blättern zu bringen. Die Abbildungs-Unterschriften gehören dagegen zum Text und sind dem Manuskript beizugeben.

2. Veränderungen des Textes in der Korrektur sind auf die Fälle zu beschränken, wo sich nachträglich *wirkliche Irrtümer* herausstellen. Sollte ein Irrtum bemerkt werden, bevor noch Korrektur eingetroffen ist, dann ist ein verbesserter Text sofort an die Redaktion zu schicken, die dafür Sorge tragen wird, daß das Manuskript noch vor dem Satz berichtigt wird.

Insbesondere sind rein stilistische Verbesserungen zu unterlassen. Größere Änderungen und Zusätze, die sich nicht auf die Berichtigung von Irrtümern beschränken, bedürfen der Zustimmung der Redaktion und sollen, auch um der geschichtlichen Genauigkeit willen, in einer Fußnote als nachträglich gekennzeichnet und datiert werden.

Als Norm soll gelten, daß der Verfasser von jeder Arbeit *eine Fahnenkorrektur und eine Korrektur in Bogen* liest. Wir bitten unsere Verfasser, sich hiermit begnügen zu wollen.

Die Redaktion der Mathematischen Annalen

Mathematische Annalen

Erscheinen zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in Heften, die zu Bänden vereinigt werden. Sie sind durch jede Buchhandlung zu beziehen. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Mathematischen Annalen bestimmte Manuskripte können bei jedem der unten verzeichneten Redaktionsmitglieder eingereicht werden:

Inhaltsverzeichnis des Heftes auf Seite 3

SANKARAN, S.
Math. Annalen 142, 399—406 (1961)

Decomposition of von Neumann algebras of Type I

By

S. SANKARAN in Hull, England

Introduction

Let E and F be non zero projections in a countably decomposable von Neumann algebra $\mathscr{A}$ and let $e(E)$, $e(F)$ be their respective central supports. E and F are said to be disjoint in $\mathscr{A}$ if $e(E)\,e(F) = 0$, E is said to cover F, $(E \gg F)$, if $e(F) \leqq e(E)$, and E is said to be essentially equivalent to F if $e(E) = e(F)$. In section 1 we consider the relation between these concepts and the concept of equivalence of projections due to MURRAY and VON NEUMANN. Using a decomposition theorem (theorem 1.1) we show that if $\{F_n\}$ is a sequence of mutually orthogonal projections in $\mathscr{A}$, where $\sum\limits_1^\infty F_n = I$, then we can construct a sequence $\{E_n\}$ of mutually orthogonal projections in $\mathscr{A}$ such that $\sum\limits_1^\infty E_n = I$ and $E_1 \gg E_2 \gg \cdots \gg E_n \gg \cdots$ If $\mathscr{A}$ is a von Neumann algebra of type I and if the F_n's are abelian projections then the E_n's are abelian projections and the ordering becomes $E_1 \succ E_2 \succ \cdots \succ E_n \succ \cdots$ The significance of this construction is clear when we consider a discretely decomposable von Neumann algebra $\mathscr{A}$ (see definition 3.1.). In section 3 we show that in this case each E_n is the direct sum of minimal projections in $\mathscr{A}$, and that no minimal projection appears more than once in the summand for E_n. Further if a minimal projection G appears in E_n, and not in E_{n+1}, then G appears in $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}$ but not in $E_{n+2}, \ldots$ Hence the ordering $E_1 \succ E_2 \succ \cdots \succ E_n \succ \cdots$ enumerates both the minimal projections and their multiplicity in a discretely decomposable von Neumann algebra. In section 4 we show that if $\mathscr{A}$ is a von Neumann algebra of type I, then the number of non zero projections in $\{E_n\}$ (where E_n are abelian, and $E_1 \succ E_2 \succ \cdots$) is unique up to equivalence. Finally we give a set of necessary and sufficient conditions for two von Neumann algebras of type I to be unitarily equivalent.

1. Disjointness and essential equivalence

Let $\mathscr{H}$ be a complex Hilbert space of dimension $n > 0$. In this paper the terms operator and projection mean respectively linear bounded everywhere defined transformation on $\mathscr{H}$ and orthogonal projection. A collection $\mathscr{F}$ of operators is said to be self-adjoint if $\mathscr{F}$ contains the adjoint of each of its members. The term algebra is used to denote a self-adjoint algebra (over complex numbers) of operators on $\mathscr{H}$. An algebra which contains the identity

operator I, and which is closed in the weak neighbourhood topology for operators is called a von Neumann algebra.

Let $\mathscr{A}$ be a von Neumann algebra on $\mathscr{H}$. The set of all operators on $\mathscr{H}$ which commute with the elements of $\mathscr{A}$ is called the commutant of $\mathscr{A}$ and is denoted by $\mathscr{A}'$. The set $\mathscr{Z} = \mathscr{A} \cap \mathscr{A}'$ is called the centre of $\mathscr{A}$. $\mathscr{A}$ is called a factor if $\mathscr{Z} = \{\alpha I\}$, ($\alpha$ complex numbers). The set $\{ETE: T \in \mathscr{A}\}$, where E is a projection in $\mathscr{A}$, is denoted by $\mathscr{A}_E$. It is known that $\mathscr{A}_E$ is a von Neumann algebra whose commutant is $\mathscr{A}'_E$ and whose centre is $\mathscr{Z}_E$. $\mathscr{A}$ is said to be countably decomposable, if every collection of mutually orthogonal projections in $\mathscr{A}$ has at most a countable number of non-zero members. The von Neumann algebras we consider are countably decomposable.

Let E be a projection in the von Neumann algebra $\mathscr{A}$. The projection $e(E)$ in the centre of $\mathscr{A}$ defined by $e(E) = g \cdot l \cdot b\, \{G : GE = E, G \text{ a projection in } \mathscr{Z}\}$ is called the central support of E. F. J. Murray and J. von Neumann have introduced an equivalence relation among projections in $\mathscr{A}$: two projections E and F are equivalent, $E \sim F$, if there exists a partially isometric operator $V \in \mathscr{A}$ such that $V^* V = E$ and $V V^* = F$. If $E \sim F$ then $e(E) = e(F)$.

Definition 1.1. Let E and F be projections in $\mathscr{A}$. If $e(E)\, e(F) = 0$ then E and F are said to be disjoint (from each other) and we write $E \curlywedgedownarrow F$. If $e(F) \leqq e(E)$ then E is said to cover F, in symbols $F \ll E$ or $E \gg F$. If $F \ll E$ and $E \ll F$ then E and F are said to be essentially equivalent, in symbols $E \approx F$.

Lemma 1.1. *If E and F are disjoint then E and F are mutually orthogonal. Essential equivalence is reflexive, symmetric, and transitive and hence is an equivalence relation. If E is equivalent to F then E is essentially equivalent to F. In a factor any two non-zero projections are essentially equivalent.*

All statements of the lemma follow from definition.

Lemma 1.2. *Let E and F be non-zero projections in $\mathscr{A}$. E and F are disjoint if and only if no non-zero subprojection of E in $\mathscr{A}$ is equivalent to a subprojection of F.*

Proof. Let $e(E)\, e(F) = 0$. Suppose $E_1 \sim F_1$ where $0 \leqq E_1 \leqq E$ and $0 \leqq F_1 \leqq F$. Then $e(E_1) = e(F_1)$ and $e(E_1) \leqq e(E)$, $e(F_1) \leqq e(F)$. That is $e(E_1) = e(F_1) \leqq e(E)\, e(F) = 0$ and hence $e(E_1) = e(F_1) = 0$. Thus $E_1 = F_1 = 0$.

Conversely, by lemme 1 (pp. 227—228, [1]), if $e(E)\, e(F) \neq 0$, we can find $0 < E_1 \leqq E$ and $0 < F_1 \leqq F$ such that $E_1 \sim F_1$ where E_1, F_1 are projections in $\mathscr{A}$.

Lemma 1.3. *Let E and F be non-zero projections in $\mathscr{A}$. E covers F if and only if no non-zero subprojection of F in $\mathscr{A}$ is disjoint from E.*

Proof. We shall prove the following equivalent form of the lemma. $F \ll E$ if and only if for every projection $G \in \mathscr{A}$, $0 < G \leqq F$ there corresponds a projection $F_1 \in \mathscr{A}$, $0 < F_1 \leqq G$ such that $F_1 \sim E_1 \leqq E$.

If $0 < G \leqq F \ll E$ then $e(G) \leqq e(F) \leqq e(E)$, and hence $e(G)\, e(E) \neq 0$. By lemme 1 of [1] referred to above there exists a projection $F_1 \in \mathscr{A}$, $0 < F_1 \leqq G$ such that $F_1 \sim E_1 \leqq E$.

Conversely, suppose every projection $G \in \mathscr{A}$, $0 < G \leqq F$, contains a non-zero projection $F_1 \in \mathscr{A}$, $F_1 \leqq G$, such that $F_1 \sim E_1 \leqq E$. Taking $G = F$

we find F_1 and E_1. When F_{n-1} and E_{n-1} has been found, where $F_{n-1} \sim E_{n-1}$, F_{n-1}, E_{n-1} are non-zero projections in $\mathscr{A}$ we let $G = F - \sum_{i=1}^{n-1} F_i$ and find $F_n \leqq G$ such that $F_n \sim E_n \leqq E$. Since the F_n's are mutually orthogonal and $\mathscr{A}$ is countably decomposable we have $F = \sum_1^\infty F_i$. Finally, $e(F_i) = e(E_i) \leqq e(E)$ and hence $e(F) \leqq \bigcup_1^\infty e(F_i) \leqq e(E)$. This proves the lemma.

Murray and von Neumann have shown that in a factor $\mathscr{B}$ any two non-zero projections are comparable under $\prec$. This result now follows easily from lemma 1.3. Let E and F be non-zero projections in a factor $\mathscr{B}$. Since $E \approx F$, taking $G = F$ in lemma 1.3 we can find $0 < F_1 \leqq F$, and $0 < E_1 \leqq E$ such that $E_1 \sim F_1$ where E_1, F_1 are projections in $\mathscr{B}$. When the projections F_{n-1} and E_{n-1} have been found, where $E_{n-1} \sim F_{n-1}$, we find E_n and F_n as follows. The projections $E - \sum_1^{n-1} E_i$ and $F - \sum_1^{n-1} F_i$ are essentially equivalent and hence there exist projections $F_n \leqq F - \sum_1^{n-1} F_i$ and $E_n \leqq E - \sum_1^{n-1} E_i$ such that $F_n \sim E_n$. After a countable number of such steps either $F - \sum_1^\infty F_i = 0$ in which case $F \sim \sum_1^\infty E_i \leqq E$ or $E - \Sigma E_i = 0$ and hence $E \sim \Sigma F_i \leqq F$.

Theorem 1.1. (Decomposition theorem.) *Let E and F be non-zero projections in a von Neumann algebra $\mathscr{A}$. There exists a unique decomposition of F relative to E, $F = F_1 + F_2$, where F_1, F_2 are projections in $\mathscr{A}$, such that $F_1 \curlyvee F_2$, $F_1 \curlyvee E$ and $F_2 \ll E$.*

Proof. Let $F_2 = Fe(E)$ and $F_1 = F(I - e(E)) = F - F_2$. Since $e(F_2) \leqq e(E)$ and $e(F_1) \leqq I - e(E)$ it follows that $F_1 \curlyvee F_2$, $F_1 \curlyvee E$, and $F_2 \ll E$.

Let $F = G_1 + G_2$ where G_1, G_2 are projections in $\mathscr{A}$ such that $G_1 \curlyvee G_2$, $G_1 \curlyvee E$, and $G_2 \ll E$. Since $G_2 \leqq e(G_2) \leqq e(E)$ and $F_1 \leqq e(F_1) \leqq I - e(E)$, we have $G_2 F_1 = 0$. Hence $G_2 = G_2 F = G_2(F_1 + F_2) = G_2 F_2$ and therefore $G_2 \leqq F_2$. By symmetry $F_2 \leqq G_2$ and hence $G_2 = F_2$. Similarly $F_1 = G_1$, and the decomposition $F = F_1 + F_2$ is unique. This proves the theorem.

Definition 1.2. A non-zero projection E in $\mathscr{A}$ is called primary if E cannot be expressed as the sum of two disjoint projections in $\mathscr{A}$.

Theorem 1.2. *In a von Neumann algebra $\mathscr{A}$ the following conditions on a non-zero projection E are equivalent.*

i. *E is a primary projection in $\mathscr{A}$,*

ii. *$e(E)$ is minimal among the projections in the centre of A, and*

iii. *$\mathscr{A}_E$ is a factor.*

Proof. Let E be primary and let $G \in \mathscr{Z}$ be a projection such that $0 \leqq G \leqq e(E)$. Let $E_1 = EG$ and $E_2 = E - E_1 = E(e(E) - G)$. It is clear that E_1 and E_2 are disjoint and $E = E_1 + E_2$. Since E is primary either $E_1 = 0$ or $E_2 = 0$. If $E_1 = 0$, then $E_2 = E = E(e(E) - G)$ and hence $e(E) \leqq e(E) -$

$-G \leqq e(E)$. Hence $G = 0$. Similarly if $E_2 = 0$, we have $G = e(E)$. Thus $e(E)$ is a minimal projection in $\mathscr{Z}$.

Suppose $e(E)$ is minimal in $\mathscr{Z}$. The centre of $\mathscr{A}_{e(E)}$ is $Z_{e(E)}$, and hence $\mathscr{A}_{e(E)}$ is a factor. Since $E \leqq e(E)$ it follows that $\mathscr{A}_E$ is a factor.

Let $\mathscr{A}_E$ be a factor. Let $E = E_1 + E_2$ where $E_1, E_2 \in \mathscr{A}$, and $E_1 \perp E_2$. Since $e(E_1) \in \mathscr{Z}$, we have $Ee(E_1)E = Ee(E_1)$ is in $E\mathscr{Z}E$, and since $\mathscr{A}_E$ is a factor, it follows that either $Ee(E_1) = 0$ or $Ee(E_1) = E$. Since $E_1 \leqq E$, if $Ee(E_1) = 0$ then $e(E_1) = 0$ and hence $E_1 = 0$. If $Ee(E_1) = E$, then $e(E) \leqq e(E_1)$ and hence $e(E) = e(E_1)$.

Therefore $e(E_2) = 0$, which implies that $E_2 = 0$. Thus either $E_1 = 0$ or $E_2 = 0$ and hence E is primary. This proves the theorem.

Definition 1.3. A primary projection E in $\mathscr{A}$ is said to be of type I if it contains a non-zero minimal projection of $\mathscr{A}$.

It follows from theorem 1.2 that all minimal projections of $\mathscr{A}$ are primary and type I. It is easy to see that two minimal projections in $\mathscr{A}$ are either equivalent or disjoint. A primary projection E of type I is essentially equivalent to the minimal projection F it contains; for, $e(F) \leqq e(E)$, and by theorem 1.2, $e(E)$ is minimal in $\mathscr{Z}$. Hence $e(F) = e(E)$. For minimal projections essential equivalence implies equivalence. Hence if E is a primary type I projection, the minimal projection it contains is unique up to equivalence.

The proof of the following lemma is similar to the proof of lemma 1.3.

Lemma 1.4. *If E is a non-zero primary projection of type I in $\mathscr{A}$, and F is the minimal projection contained in E, then $E = \sum_1^n E_i$, $(n = \infty, 1, 2, \ldots)$ where E_i is equivalent to F and $E_iE_j = 0$ for $i \neq j$. Conversely, $\sum_1^k E_i$, $(k = \infty, 1, 2, \ldots)$ is a primary type I projection.*

Lemma 1.4. shows that if F is a minimal projection in $\mathscr{A}$, and $\{E_i\}$ a sequence of mutually orthogonal projections in $\mathscr{A}$, such that $E_i \sim F$ then the projections $P = \sum_1^p E_i$ and $Q = \sum_1^q E_i$, $p \neq q$, are essentially equivalent. Thus essential equivalence fails to distinguish the multiplicity with which a minimal projection appears in two primary type I projections. We shall show in sections 2 and 4 that in spite of its coarseness essential equivalence is adequate to characterise the multiplicity of certain von Neumann algebras.

2. A construction

Definition 2.1. A finite non-zero projection F in a von Neumann algebra $\mathscr{A}$ is called abelian if $F \lll E$ implies that $F \prec E$ in the sense of [2]. A von Neumann algebra $\mathscr{A}$ is said to be of type I if every non-zero projection E in $\mathscr{A}$ contains an abelian projection.

Lemma 2.1. *If $F \in \mathscr{A}$ is abelian then $F\mathscr{A}F$ is a commutative algebra.*

Proof. To show that $F\mathscr{A}F$ is commutative it is enough to show that every pair of mutually orthogonal projections in $F\mathscr{A}F$ are disjoint; for, it will then follow that every projection of $F\mathscr{A}F$ is its own central support and hence by spectral theorem the algebra will coincide with its centre.

Let $0 < P < F$ be a projection in $\mathscr{A}$. If P and $(F - P)$ are not disjoint in $\mathscr{A}$, by lemma 1.2, we can find projections $0 < P_1 < P$ and $0 < P_2 < F - P$ such that $P_1 \sim P_2$. Suppose a projection Q, $Q \leqq F$, $Q \in \mathscr{A}$ is disjoint from $F - P_2$. Then Q is orthogonal to $F - P_2$, and hence $Q \leqq P_2$. Since $Q \curlywedge F - P_2$, and since $P_1 \leqq F - P_2$, we have $Q \curlywedge P_1$. Hence $e(Q)\,e(P_2) = e(Q)\,e(P_1) = 0$. That is Q is also disjoint from P_2. Hence $Q = 0$. Therefore no subprojection of F is disjoint from $F - P_2$. By lemma 1.3, we have then $F \ll F - P_2$. Since F is abelian, we have $F \sim F_1 \leqq F - P_2 < F$. This is clearly impossible since F is finite by assumption. This proves the lemma.

Remark. Having established that our definition 2.1 of abelian projections in $\mathscr{A}$ is the same as definition 3, (Chapter I, § 8, No. 2) of [1], (see also Lemme 1, Chapter III, § 3, No. 1 [1]), we shall use without further comments the properties of abelian projections given in pages 123 and 124 of [1]. The sum of two mutually orthogonal abelian projections in $\mathscr{A}$ is not abelian in general. However, it is easy to verify that if F_1 and F_2 are abelian and disjoint then $F_1 + F_2$ is abelian.

In the following construction it is convenient to write $\{F(n)\}$ to denote the sequence $\{F_n\}$.

Let $\mathscr{A}$ be a von Neumann algebra of type I. Let $\{F(n)\}$ be a sequence of mutually orthogonal abelian projections in $\mathscr{A}$ such that $\sum\limits_1^\infty F(n) = I$. By theorem 1.1 we decompose $F(2)$ with respect to $F(1)$: $F(2) = F(21) + F(22)$ where $F(21) \curlywedge F(22)$, $F(21) \curlywedge F(1)$ and $F(22) \ll F(1)$. Since every non-zero subprojection of an abelian projection is abelian, $F(21)$ is abelian and hence $F(11) + F(21)$ is abelian. Here $F(11) = F(1)$. We next decompose $F(3)$ with respect to $F(11) + F(21)$: $F(3) = F(31) + F(32)$ where $F(31) \curlywedge F(32)$, $F(31) \curlywedge F(11) + F(21)$ and $F(32) \ll F(11) + F(21)$. We form $F(11) + F(21) + F(31)$ and observe that it is abelian and that $F(22)$, $F(32)$ are covered by it. In general, when we have decomposed $F(n-1)$ and formed $\sum\limits_{k=1}^{n-1} F(k1)$, we decompose $F(n)$ with respect to $\sum\limits_{k=1}^{n-1} F(k1)$: $F(n) = F(n1) + F(n2)$ where $F(n1) \curlywedge F(n2)$, $F(n1) \curlywedge \sum\limits_{k=1}^{n-1} F(k1)$, and $F(n2) \ll \sum\limits_{k=1}^{n-1} F(k1)$. We form $F(n1) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} F(k1)$ and observe that it is abelian, and that $F(l2) \ll \sum\limits_{k=1}^{n} F(k1)$ for $l = 2, 3, \ldots n$. By induction we carry the process to exhaust the sequence $\{F(n)\}$ and thus obtain

(i) an abelian projection $E_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} F(k1)$, and

(ii) a residual sequence of mutually orthogonal abelian projections

$\{F(k2)\}$ $k = 2, 3, \ldots$ such that $F(k2) \ll E_1$ for $k = 2, 3, \ldots$

We next repeat the process with the first non-zero projection of the sequence $\{F(k2)\}$, say $F(22)$. Decompose $F(32)$ with respect to $F(22)$: $F(32) = F(321) + F(322)$ where $F(321) \curlywedge F(322)$, $F(321) \curlywedge F(22)$ and $F(322) \ll F(22)$ and

form the abelian projection $F(221) + F(321)$. Here $F(221) = F(22)$. In general when $F((n-1)2)$ has been decomposed, and we have constructed $\sum_{k=2}^{n-1} F(k21)$ we decompose $F(n2)$:

$$F(n2) = F(n21) + F(n22) \text{ where } F(n21) \perp F(n22), F(n21) \perp \sum_{k=2}^{n-1} F(k21)$$

and $F(n22) \ll \sum_{k=2}^{n-1} F(k21)$. We form the abelian projection $\sum_{k=2}^{n-1} F(k21) +$ $+ F(n21) = \sum_{k=2}^{n} F(k21)$. It is clear that $F(l22) \ll \sum_{k=2}^{n} F(k21)$ for $l = 3, 4, \ldots, n$. By induction we carry the process to exhaust the sequence $\{F(n2)\}$ and obtain

(i) an abelian projection $E_2 = \sum_{k=2}^{\infty} F(k21)$, and

(ii) a residual sequence of mutually orthogonal abelian projections $F(k22)$ $k = 3, 4, \ldots$

We observe that since $F(k21) \leq F(k2) \ll E_1$, for $k = 2, 3, \ldots$

we have $\sum_{k=2}^{\infty} F(k21) \ll E_1$, i. e. $E_2 \ll E_1$.

When E_n has been thus constructed, we have.

(i) $E_1 \gg E_2 \gg \cdots \gg E_n$, where E_i are abelian, $i = 1, 2, \ldots, n$,

and (ii) a residual sequence $\{F(k2 \ldots 2 \ldots 2)\}$ $k = n + 1, \ldots$ of mutually orthogonal abelian projections with the property that

$$F(k2 \ldots 2 \ldots 2) \ll E_n \ll \cdots \ll E_1 \text{ where } k = n + 1, n + 2, \ldots$$

By induction we carry the process to the stage where the residual projections are all zero. We then have a sequence $\{E_n\}$ of mutually orthogonal abelian projections in $\mathscr{A}$, such that $\sum E_n = I$, and

$$E_1 \gg E_2 \gg \cdots \gg E_n \gg \cdots \text{——} (*) .$$

Since the projections E_n are abelian , we have

$$E_1 \succ E_2 \succ \cdots \succ E_n \succ \cdots \ (**) .$$

Definition 2.2. A sequence $\{E_i\}$ of mutually orthogonal abelian projections in a von Neumann algebra $\mathscr{A}$ of type I is called an abelian decomposition of the identity I, if

$$\Sigma E_i = I \text{ and } E_1 \succ E_2 \succ \cdots \succ E_i \succ \cdots$$

The number of non-zero projections in the set $\{E_i\}$ is called the length of the identity.

3. An illustration

The significance of the construction of section 2 is clear when we consider a discretely decomposable von Neumann algebra of type I, where

Definition 3.1. A von Neumann algebra $\mathscr{B}$ of type I is discretely decomposable if every central projection of $\mathscr{B}$ contains a non-zero minimal central projection (minimal among the central projections of $\mathscr{B}$).

Lemma 3.1. *Let $\mathscr{B}$ be a discretely decomposable von Neumann algebra of type I. A non-zero projection F in $\mathscr{B}$ is abelian if and only if $F = \Sigma P_i$ where $\{P_i\}$ is a sequence of mutually disjoint minimal projections in $\mathscr{B}$.*

Proof. The proof of the "if" part being trivial, we prove the "only if" part of the lemma. Let $F \in \mathscr{B}$ be abelian. Let $e(F) = \sum_1^n G_i$ where G_i are mutually orthogonal minimal projections in $\mathscr{Z}$. Let $P_j = G_j F$. If $P_j = 0$, then $F \leqq e(F) - G_j < e(F)$ and hence $e(F) \leqq e(F) - G_j < e(F)$. Hence $P_j \neq 0$. Let $0 < P \leqq P_j$ where P is a projection in $\mathscr{B}$. Since P_j is abelian, we have $P = P_j e(P)$. Since $e(P) = e(P_j) = G_j$ we have $P = P_j$. And hence P_j is minimal. Thus $F = \sum_1^n P_j$. This proves the lemma.

Let $\{F(n)\}$ be a maximal sequence of mutually orthogonal abelian projections in a discretely decomposable von Neumann algebra $\mathscr{B}$ of type I. Let $\{E_n\}$ be the ordered abelian sequence obtained from $\{F(n)\}$. It is easy to verify that in the decomposition $F(2) = F(21) + F(22)$ with respect to $F(1)$, (where $F(21) \curlywedgedownarrow F(1)$ and $F(22) \ll F(1)$), $F(21)$ consists of those minimal projections of $\mathscr{B}$ which are in $F(2)$ but not in $F(1)$; and $F(22)$ consists of those minimal projections which are in $F(2)$ and $F(1)$. Considered from this point of view, E_1 contains every minimal projection of $\mathscr{B}$ and no minimal projection appears in E_1 more than once. It is also clear that if a minimal projection P appears in E_n (and therefore in $E_{n-1}, E_{n-2}, \ldots, E_1$) but not in E_{n+1} (and therefore not in $E_{n+2}, \ldots$) then P appears with multiplicity n in I. Thus the ordered abelian decomposition of I gives both the minimal projections and their multiplicities.

4. von Neumann algebras of type I

Lemma 4.1. *Let $\mathscr{A}$ be a von Neumann algebra of type I and let $\{F_n\}$ and $\{E_n\}$ be two ordered abelian decompositions of the identity in $\mathscr{A}$. Then F_n is equivalent to E_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$*

Proof. Let $F_1 \succ F_2 \succ \cdots \succ F_n \succ \cdots$ and $E_1 \succ E_2 \succ \cdots \succ E_n \succ \cdots$ where the sequence $\{F_n\}$ ($\{E_n\}$) is orthogonal and $\Sigma F_n = I (\Sigma E_n = I)$. Decompose $F_1 = F_{11} + F_{12}$ such that $F_{11} \curlywedgedownarrow E_1$ and $F_{12} \ll E_1$. Since F_{11} is orthogonal to E_1, we have $F_{11} \leqq \sum_2^\infty E_i$. Hence we can find a non-zero projection $P \leqq F_{11}$ such that $P \sim Q \leqq E_i$ for some i, $i = 2, 3, \ldots$

Hence $e(P) = e(Q) \leqq e(E_i) \leqq e(E_1)$ because $E_i \prec E_1$ and $e(Q)\, e(E_1) = e(P)\, e(E_1) \leqq e(F_{11})\, e(E_1) = 0$. Thus $Q = P = 0$ and hence $F_{11} = 0$. That is $F_1 \ll E_1$. Since F_1 is abelian , we have $F_1 \lesssim E_1$. By symmetry $E_1 \lesssim F_1$ and hence $E_1 \sim F_1$.

Suppose we have shown that $E_i \sim F_i$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Then $\left(I - \sum_1^{n-1} E_i\right) = \sum_n^\infty E_i \sim \sum_n^\infty F_i = \left(I - \sum_1^{n-1} F_i\right)$. Write $F_n = F_{n1} + F_{n2}$ where $F_{n1} \curlywedgedownarrow E_n$ and $F_{n2} \ll E_n$. Since $F_{n1} < F_n \lesssim \sum_n^\infty E_i$, we can find a non-zero subprojection $P \leqq F_{n1}$ such that $P \sim Q \leqq E_i$ for some i, $i = n, n + 1, \ldots$

As in the last paragraph we can show that $P = 0$, and hence $F_{n1} = 0$. We thus show that $F_n \ll E_n$ which implies that $F_n \lesssim E_n$. By symmetry we have $E_n \lesssim F_n$ and hence $E_n \sim F_n$. This proves the lemma.

Collecting the results of section 2 and the last lemma we have

Theorem 4.1. *Every countably decomposable von Neumann algebra of type I has an ordered abelian decomposition of the identity. The length of the identity is unique up to equivalence.*

Theorem 4.2. *Let $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$ be von Neumann algebras of type I. Let $\{E_n\}$ and $\{F_n\}$ be the ordered abelian decompositions of $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$ respectively. A set of necessary and sufficient conditions for $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$ to be unitarily equivalent is*

(i) *the lengths of the identity of $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$ are equal, and*

(ii) *$\mathscr{A}_{E_n}$ is unitarily equivalent to $\mathscr{B}_{F_n}$ for each n.*

Proof. Let $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$ be defined on Hilbert spaces $\mathscr{H}_1$ and $\mathscr{H}_2$ respectively. Suppose the conditions of the theorem are satisfied. Let U_n be the isometry from the range of E_n to the range of F_n such that $U_n \mathscr{A}_{E_n} U_n^{-1} = B_{F_n}$. It is easy to verify that two von Neumann algebras are unitarily equivalent if and only if their commutants are unitarily equivalent. Hence $U_n \mathscr{A}'_{E_n} U_n^{-1} = B'_{F_n}$. Since E_n (resp. F_n) commutes with $\mathscr{A}'$ (resp. $\mathscr{B}'$), we have for $A' \in \mathscr{A}'$ (resp. $B' \in \mathscr{B}'$) the direct sum $A' = \Sigma A'_{E_n}$ (resp. $B' = \Sigma B'_{F_n}$).

Let $U = \Sigma U_n$. Then U is an unitary transformation from $\mathscr{H}_1$ onto $\mathscr{H}_2$. If $A' \in \mathscr{A}'$, then $UA'U^{-1} = U\,(\Sigma A'_{E_n})\,U^{-1} = \Sigma U_n A'_{E_n} U_n^{-1} = \Sigma B'_{F_n} = B'$ in $\mathscr{B}'$. Hence $\mathscr{A}'$ is unitarily equivalent to $\mathscr{B}'$, and therefore $\mathscr{A}$ is unitarily equivalent to $\mathscr{B}$.

Conversely, suppose $U\mathscr{A}U^{-1} = B$. It is easy to verify that $\{UE_nU^{-1}\}$ is an ordered abelian decomposition of the identity in $\mathscr{B}$. By theorem 4.1, the cardinality of the sets $\{UE_nU^{-1}\}$ and $\{F_n\}$ are the same. Hence the cardinality of $\{E_n\}$ and $\{F_n\}$ are the same. That is the lengths of the identity in $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$ are the same.

To show that $U\mathscr{A}_{E_n}U^{-1} = \mathscr{B}_{F_n}$ it is enough to show that $U\mathscr{A}_{E_n}U^{-1} = B_{UE_nU^{-1}}$. For, since UE_nU^{-1} is equivalent to F_n in $\mathscr{B}$, it follows that $\mathscr{B}_{UE_nU^{-1}}$ is unitarily equivalent to $\mathscr{B}_{F_n}$.

$$\text{Now } U\mathscr{A}_{E_n}U^{-1} = UE_n\mathscr{A}E_nU^{-1} = UE_nU^{-1}(U\mathscr{A}U^{-1})\,UE_nU^{-1}$$
$$= UE_nU^{-1}\mathscr{B}UE_nU^{-1} = \mathscr{B}_{UE_nU^{-1}}.$$

This proves the theorem.

References

[1] Dixmier, J.: Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien. (Algèbres de von Neumann) Paris 1957.

[2] Murray, F. J., and J. von Neumann: On rings of operators. Ann. Math. 37, 116—229 (1936).

(Received June 12, 1960)

HOLMANN, H.
Math. Annalen 142, 407—440 (1961)

Quotienten komplexer Räume

Von
HARALD HOLMANN in Münster (Westfalen)

Einleitung

In der klassischen Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen werden Automorphismengruppen G von Riemannschen Flächen F betrachtet, die eigentlich diskontinuierlich operieren, wie z. B. die Gruppe der Decktransformationen der universellen Überlagerungsfläche einer gegebenen Riemannschen Fläche. Der Quotient F/G ist stets auf natürliche Weise wieder eine Riemannsche Fläche. In der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlicher liegen die Verhältnisse zunächst ganz anders. Geht man von einer komplexen Mannigfaltigkeit X aus, so besitzt der Quotient von X nach einer auf X eigentlich diskontinuierlich[1]) operierenden Automorphismengruppe G im allgemeinen keine Mannigfaltigkeitsstruktur mehr, vielmehr ist X/G für gewöhnlich ein komplexer Raum[2]). Sieht man jedoch in den komplexen Räumen die richtige Verallgemeinerung des Begriffes der Riemannschen Fläche, so läßt sich das klassische Resultat auf die Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlicher ohne weiteres übertragen. Von H. CARTAN wurde gezeigt[3]):

Der Quotient X/G eines komplexen Raumes X nach einer auf X eigentlich diskontinuierlich operierenden Automorphismengruppe G besitzt auf natürliche Weise wieder eine komplexe Struktur. Ist X ein normaler komplexer Raum, so auch X/G.

Der Zusatz „auf natürliche Weise" bedeutet dabei folgendes. Sei R eine Äquivalenzrelation auf dem komplexen Raum X (mit einer Strukturgarbe $\mathfrak{A}$) und bezeichne $\pi: X \to X/R$ die kanonische Projektion, dann kann man jeder offenen Menge U von X/R den Ring S_U der stetigen komplexwertigen Funktionen f auf U zuordnen, wobei $f \circ \pi$ in $\pi^{-1}(U)$ holomorph ist. Liegt V offen in U, so sei unter $s_V^U: S_U \to S_V$ die natürliche Beschränkung verstanden. $\{S_U, s_V^U\}$ stellt ein Garbendatum einer Garbe $\mathfrak{A}/R$ auf X/R dar[4]). Macht die soeben definierte Garbe $\mathfrak{A}/R$ den Quotientenraum X/R zu einem komplexen Raum, dann sagt man, daß der Quotientenraum X/R „auf natürliche Weise" wieder eine komplexe Struktur besitzt.

In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen der Quotient X/L eines komplexen Raumes X nach einer komplexen Lieschen Automorphismengruppe L auf natürliche Weise einen komplexen Raum ergibt.

[1]) Siehe [4] u. [5] sowie Definition 14 der vorliegenden Arbeit.

[2]) Siehe [4], Theorem 1.

[3]) Siehe [5], Theorem 4.

[4]) Vgl. [4], Seite XII, 2, und [5], Seite 96/97.

Dazu hat man den Begriff der *eigentlich diskontinuierlich* operierenden Automorphismengruppe so zu erweitern, daß auch die komplexen Lieschen Automorphismengruppen positiver Dimension darunterfallen. Das gelingt dadurch, daß wir erklären, wann eine komplexe Liesche Automorphismengruppe L auf einem komplexen Raum X *separabel* operiert.

Man beachte die Analogien in der Gegenüberstellung der beiden Definitionen für *eigentlich diskontinuierlich* bzw. *separabel* operierende Automorphismengruppen.

Definition: *Eine Automorphismengruppe G eines komplexen Raumes X operiert eigentlich diskontinuierlich auf X, wenn die folgenden Bedingungen gelten:*

(a) *Zwei nicht G-äquivalente Punkte x' und x'' aus X besitzen stets Umgebungen*[5]) *U' bzw. U'', so daß $g(U')$ und U'' für alle $g \in G$ disjunkt sind.*

(b) *Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung U_x (invariant gegenüber der Isotropiegruppe G_x), so daß aus $g \in G$, $x' \in U_x$, $g \circ x' \in U_x$ folgt: $g \in G_x$.*

(c) *Für jeden Punkt $x \in X$ ist die Isotropiegruppe G_x endlich.*

Definition: *Eine komplexe Liesche Automorphismengruppe L eines komplexen Raumes X operiert separabel auf X, wenn neben den Bedingungen* (a) *und* (c) *gilt:*

(b') *Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung U_x, und es gibt eine durch x laufende analytische Menge s_x in U_x, sowie eine Umgebung V_ε des identischen Automorphismus ε aus L, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Durch die Zuordnung $\Phi : (g, x') \to g \circ x'$ wird $V_\varepsilon \times s_x$ biholomorph auf U_x abgebildet.*

2. *s_x ist invariant gegenüber der Isotropiegruppe L_x, und aus $g \in L$, $x' \in s_x$, $g \circ x' \in s_x$ folgt : $g \in L_x$.*

Es gilt die folgende Verallgemeinerung des Cartanschen Satzes:

Der Quotientenraum X/L eines komplexen Raumes X (versehen mit der Strukturgarbe $\mathfrak{A}$) *nach einer auf X separabel operierenden komplexen Lieschen Automorphismengruppe L besitzt auf natürliche Weise wieder eine komplexe Struktur* (nämlich $\mathfrak{A}/L$). *Ist X ein normaler komplexer Raum, so auch X/L.*

Zwischen X und X/L bestehen die folgenden Beziehungen:

1. *Die kanonische Projektion $\pi : X \to X/L$ ist holomorph.*

2. *Jede holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ von X in einen komplexen Raum Y, die auf L-äquivalenten Punkten von X gleiche Werte annimmt, läßt sich durch π faktorisieren, d. h. es gibt eine holomorphe Abbildung $f^* : X/L \to Y$, so daß $f = f^* \circ \pi$.*

Die eigentlich diskontinuierlich operierenden Automorphismengruppen sind durch Bedingungen rein topologischer Natur charakterisiert, während bei unserer Definition der separabel operierenden Automorphismengruppe eines komplexen Raumes funktionentheoretische Bedingungen auftreten. Es gilt jedoch der folgende Satz:

[5]) Es wird die Terminologie von N. BOURBAKI benutzt. Siehe [2], § 1, Definition 4. Voisinage ist hier mit Nachbarschaft übersetzt, während das Wort Umgebung für offene Nachbarschaften reserviert bleibt.

Sei L eine komplexe Liesche Automorphismengruppe eines komplexen Raumes X, für die alle Isotropiegruppen L_x, $x \in X$, endlich sind. L operiert genau dann separabel auf X, wenn L lokal eigentlich auf X operiert, d. h. wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Nachbarschaft U_x besitzt, so daß die Operationsabbildung $\Phi : L \times U_x \to X$, gegeben durch $\Phi : (g, x') \to g \circ x'$, eigentlich ist.

Damit sind auch die separabel operierenden Automorphismengruppen durch rein topologische Bedingungen gekennzeichnet.

Die eigentlich diskontinuierlich operierenden Automorphismengruppen sind in dieser Sprechweise genau die mit der diskreten Topologie versehenen Automorphismengruppen, die lokal eigentlich operieren.

Da eine kompakte komplexe Liesche Automorphismengruppe L eines komplexen Raumes X stets lokal eigentlich auf X operiert, so gilt:

Der Quotient X/L eines komplexen Raumes X (versehen mit einer Strukturgarbe $\mathfrak{A}$) *nach einer kompakten komplexen Lieschen Automorphismengruppe L besitzt stets auf natürliche Weise eine komplexe Struktur* (nämlich $\mathfrak{A}/L$), *wenn alle Isotropiegruppen L_x, $x \in X$, endlich sind.*

Jeder Automorphismengruppe L eines komplexen Raumes X (versehen mit einer komplexen Struktur $\mathfrak{A}$) ist auf natürliche Weise eine Automorphismengruppe L^* der Normalisierung (X^*, ϱ) (versehen mit einer normalen komplexen Struktur $\mathfrak{A}^*$) von X zugeordnet. Es gilt:

Die komplexe Liesche Automorphismengruppe L operiere separabel auf dem komplexen Raum X. Dann operiert auch die durch L induzierte komplexe Liesche Automorphismengruppe L^* der Normalisierung (X^*, ϱ) von X separabel auf X^*, und es gibt eine holomorphe Abbildung $\tilde{\varrho} : X^*/L^* \to X/L$ des komplexen Raumes X^*/L^* (versehen mit der normalen komplexen Struktur $\mathfrak{A}^*/L^*$) *auf den komplexen Raum X/L* (versehen mit der komplexen Struktur $\mathfrak{A}/L$), *so daß gilt: $\tilde{\varrho} \circ \pi^* = \pi \circ \varrho$.* (Dabei bezeichnen $\pi : X \to X/L$ und $\pi^* : X^* \to X^*/L^*$ die kanonischen Projektionen.) *$(X^*/L^*, \tilde{\varrho})$ stellt die Normalisierung von X/L dar.*

Für den Fall, daß eine komplexe Liesche Automorphismengruppe L echt auf einem komplexen Raum X operiert, d. h. daß alle Isotropiegruppen L_x, $x \in X$, aus der Identität allein bestehen, gelten die folgenden Aussagen:

Operiert eine komplexe Liesche Automorphismengruppe L eines komplexen Raumes X lokal eigentlich und echt auf X, dann ist X ein komplex-analytisches Prinzipalfaserbündel über dem komplexen Raum X/L mit L als typischer Faser und Strukturgruppe.

Operiert eine komplexe Liesche Automorphismengruppe L einer komplexen Mannigfaltigkeit X (versehen mit einer Strukturgarbe $\mathfrak{A}$) *lokal eigentlich und echt auf X, dann ist der Quotientenraum X/L* (versehen mit der Strukturgarbe $\mathfrak{A}/L$) *ebenfalls eine komplexe Mannigfaltigkeit.*

Als Beispiele für komplexe Mannigfaltigkeiten mit komplexen Lieschen Automorphismengruppen, die lokal eigentlich und echt operieren, kann man komplexe Liesche Gruppen betrachten, auf denen durch Linkstranslation die abgeschlossenen komplexen Lieschen Untergruppen als Automorphismengruppen operieren.

Zum Aufbau der Arbeit ist folgendes zu bemerken. Im ersten Abschnitt werden grundlegende Definitionen und Sätze über komplexe Räume zusammengestellt.

Der zweite Abschnitt enthält einige Sätze über Quotienten geringter Räume nach gewissen Klassen von Äquivalenzrelationen. Es stellt sich nämlich heraus, daß viele Sätze über Quotienten komplexer Räume nach komplexen Lieschen Automorphismengruppen nicht von der komplexen Struktur der Räume bzw. Automorphismengruppen abhängen, sondern ganz allgemein für Quotienten geringter Räume nach bestimmten — mit der geringten Struktur der Räume verträglichen — Relationen gelten.

In den restlichen Abschnitten werden die oben dargestellten Sätze bewiesen.

Der Schluß der Arbeit enthält Methoden, die es gestatten, zu vorgegebenen komplexen Räumen mit komplexen Lieschen Automorphismengruppen, deren Quotienten wieder komplexe Räume darstellen, weitere komplexe Räume und komplexe Liesche Automorphismengruppen zu bilden, wobei die sich ergebenden Quotienten wieder komplexe Strukturen besitzen.

§ 1. Komplexe Räume

In diesem Paragraphen sollen einige Grundbegriffe zusammengestellt werden, die im folgenden verwendet werden. Ist X ein topologischer Raum, so bezeichne $S(X)$ stets die Garbe der Keime von lokalen stetigen komplexwertigen Funktionen auf X.

Definition 1: *Unter einem geringten Raum*[6]) *verstehen wir ein Paar* $(X, \mathfrak{A})$, *wobei* X *ein topologischer Raum und* $\mathfrak{A}$ *eine Untergarbe von Ringen der Garbe* $S(X)$ *ist, die die Garbe* Γ *der konstanten komplexwertigen Funktionskeime umfaßt.*

$\mathfrak{A}$ heißt die Strukturgarbe des geringten Raumes $(X, \mathfrak{A})$. Ist es aus dem Zusammenhang klar, welche Struktur ein topologischer Raum X besitzt, so werden wir häufig statt $(X, \mathfrak{A})$ einfach X schreiben.

Definition 2: $(X, \mathfrak{A})$ *und* $(X', \mathfrak{A}')$ *seien zwei geringte Räume. Eine stetige Abbildung* $\varphi : X \to X'$ *heißt ein Homomorphismus, wenn sie für jeden Punkt* $x \in X$ *einen Ringhomomorphismus* φ'_x *des Halmes* $\mathfrak{A}'_{\varphi(x)}$ *in den Halm* $\mathfrak{A}_x$ *induziert, und zwar vermöge der Zuordnung*

$$\varphi'_x : f'_{\varphi(x)} \to f_x := f'_{\varphi(x)} \circ \varphi .$$

φ *heißt ein Isomorphismus, wenn* X *durch* φ *topologisch auf* X' *abgebildet wird und die induzierten Ringhomomorphismen* φ'_x *für alle* $x \in X$ *surjektive Ringisomorphismen darstellen.*

Es gilt:

a) *Sind* X, Y *und* Z *geringte Räume und stellen* $\sigma : X \to Y$ *und* $\tau : Y \to Z$ *Homomorphismen dar, so ist auch die zusammengesetzte Abbildung* $\tau \circ \sigma : X \to Z$ *wieder ein Homomorphismus.*

Definition 3: $(X, \mathfrak{A})$ *sei ein geringter Raum, dann heißt eine in einer offenen Teilmenge* U *von* X *stetige komplexwertige Funktion* f *genau dann* $\mathfrak{A}$*-morph,*

[6]) Wir schließen uns weitgehend der Terminologie von [7] an.

wenn die durch f induzierten Funktionskeime f_x, $x \in U$, eine Schnittfläche in $\mathfrak{A}$ über U darstellen (statt dessen sagt man auch kürzer: wenn f eine Schnittfläche in $\mathfrak{A}$ über U ist).

Es gilt:

b) $(X, \mathfrak{A})$ *und* $(X', \mathfrak{A}')$ *seien zwei geringte Räume. Eine stetige Abbildung* $\varphi : X \to X'$ *ist genau dann ein Homomorphismus, wenn für jede in einem Teilbereich* U' *von* X' *definierte* $\mathfrak{A}'$*-morphe Funktion* f' *gilt, daß* $f = f' \circ \varphi$ *in* $U = \varphi^{-1}(U')$ *eine* $\mathfrak{A}$*-morphe Funktion darstellt.*

Definition 4: *Eine abgeschlossene Teilmenge* M *eines geringten Raumes* $(X, \mathfrak{A})$ *heißt eine* $\mathfrak{A}$*-Menge, wenn es zu jedem Punkt* $x \in X$ *eine Umgebung* U_x *und endlich viele* $\mathfrak{A}$*-morphe Funktionen* $f_1, \ldots, f_r$ *auf* U_x *gibt, so daß* $M \cap U_x$ *gleich dem simultanen Nullstellengebilde von* $f_1, \ldots, f_r$ *ist.*

Die geringte Struktur $\mathfrak{A}$ von X induziert wie folgt auf natürliche Weise eine geringte Struktur $\mathfrak{A}(M)$ auf der $\mathfrak{A}$-Menge M. M sei als topologischer Unterraum von X, versehen mit der Relativtopologie, aufgefaßt. Für jede offene Menge U von M bezeichne T_U die Menge aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf U, die Spur einer $\mathfrak{A}$-morphen Funktion auf einer offenen Menge $\hat{U}$ von X sind, wobei $\hat{U} \cap M = U$ gilt. Ist $V \subset U$, so gibt es natürliche Beschränkungsabbildungen t_V^U mit den üblichen Eigenschaften. Die Menge aller Paare $\{(T_U, t_V^U)\}$ stellt dann ein Garbendatum für $\mathfrak{A}(M)$ dar. Die Injektion $i : M \to X$ ist eine homomorphe Abbildung. Wenn wir von $\mathfrak{A}$-Mengen M im folgenden sprechen, so seien sie stets mit der geringten Struktur $\mathfrak{A}(M)$ versehen. Es sei noch bemerkt, daß sich für beliebige Teilmengen M von X auf dieselbe Weise eine geringte Struktur $\mathfrak{A}(M)$ definieren läßt. Jeder $\mathfrak{A}$-Menge M eines geringten Raumes $(X, \mathfrak{A})$ kann man eine $\mathfrak{A}$-Idealgarbe $\mathfrak{J}(M)$ zuordnen. $\mathfrak{J}(M)$ ist definiert als die Untergarbe von $\mathfrak{A}$, deren Halme $\mathfrak{J}_x$, $x \in X$, aus den Funktionskeimen $f_x \in \mathfrak{A}_x$ bestehen, die durch Schnitte $f_{U(x)} \in H^0(U(x), \mathfrak{A})$ über Umgebungen $U(x)$ von x repräsentiert werden, die auf $M \cap U(x)$ verschwinden. Die oben auf der $\mathfrak{A}$-Menge M eingeführte geringte Struktur $\mathfrak{A}(M)$ ist auf natürliche Weise isomorph zur Urbildgarbe[7]) von $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}(M)$ bezüglich der Injektion $i : M \to X$.

Einfache Beispiele für geringte Räume erhält man in den Bereichen B eines komplexen Zahlenraumes, wenn man ihnen als Strukturgarbe die Garbe $\mathcal{O}$ der Keime von holomorphen Funktionen auf B zuordnet. Eine $\mathcal{O}$-Menge M in B ist dann nichts anderes als eine analytische Menge. $\mathcal{O}(M)$ bezeichne die durch $\mathcal{O}$ auf M induzierte geringte Struktur. Einen hausdorffschen Raum, der lokal die Struktur eines geringten Raumes $(M, \mathcal{O}(M))$ trägt, wollen wir als komplexen Raum definieren:

Definition 5: *Ein komplexer Raum*[8]) *(β-Raum) ist definiert als ein geringter Raum* $(X, \mathfrak{A})$, *wobei gilt:*

1. X *ist ein hausdorffscher Raum.*

---

[7]) Vgl. [6] und [8].
[8]) Vgl. [7].

2. *Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung U, so daß $(U, \mathfrak{A}(U))$ isomorph zu einer in einem Bereich B eines komplexen Zahlenraumes analytischen Menge $(M, \mathcal{O}(M))$ ist. Die Garbe $\mathfrak{A}$ wird holomorphe oder komplexe Struktur auf X genannt.*

Ist $(X, \mathfrak{A})$ ein komplexer Raum, so nennt man die $\mathfrak{A}$-morphen Funktionen üblicherweise holomorph, und einen Homomorphismus eines komplexen Raumes $(X, \mathfrak{A})$ in einen komplexen Raum $(X', \mathfrak{A}')$ bezeichnet man als eine holomorphe Abbildung.

Ein Paar (U, φ) heißt eine *komplexe Karte* auf dem komplexen Raum $(X, \mathfrak{A})$, wenn U eine offene Menge in X und φ eine biholomorphe Abbildung von $(U, \mathfrak{A}(U))$ auf eine in einem Bereich B eines komplexen Zahlenraumes analytische Menge $(M, \mathcal{O}(M))$ ist. Es gilt:

c) *Läßt sich ein hausdorffscher Raum X durch ein System von offenen Mengen $\{U_i : i \in I\}$ überdecken, so daß für jedes $i \in I$ eine topologische Abbildung φ_i von U_i auf eine analytische Menge $(M_i, \mathcal{O}(M_i))$ eines Bereiches B_i eines komplexen Zahlenraumes existiert, derart, daß alle Abbildungen $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$, $i, j \in I$, biholomorph sind, dann wird hierdurch genau eine komplexe Struktur $\mathfrak{A}$ auf X induziert, so daß (U_i, φ_i), $i \in I$, komplexe Karten auf X darstellen.*

Definition 6: *Ein Punkt x eines komplexen Raumes $(X, \mathfrak{A})$ heißt normal, wenn der Halm $\mathfrak{A}_x$ der Strukturgarbe im Punkte x ganz algebraisch abgeschlossen ist. Ein komplexer Raum heißt normal (β_n-Raum), wenn alle Punkte von X normal sind.*

Zu einem beliebigen komplexen Raum $(X, \mathfrak{A})$ kann man stets die eindeutig bestimmte Normalisierung[9]) bilden.

Definition 7: *Ein Paar (X^*, ϱ) heißt eine Normalisierung des komplexen Raumes $(X, \mathfrak{A})$, wenn gilt:*

1. *X^* ist ein lokal kompakter, lokal zusammenhängender topologischer Raum, $\varrho : X^* \to X$ ist eine stetige nirgends entartete eigentliche Abbildung von X^* auf X.*

2. *Nimmt man aus X die Menge N der nichtgewöhnlichen[10]) Punkte heraus, so ist der Restraum $X - N$ zu $X^* - \varrho^{-1}(N)$ vermöge der Abbildung ϱ topologisch äquivalent. Die Menge $\varrho^{-1}(N)$ zerlegt X^* nirgends.*

Es gilt:

d) *Jeder komplexe Raum $(X, \mathfrak{A})$ besitzt eine Normalisierung (X^*, ϱ). Stellt $(\tilde{X}^*, \tilde{\varrho})$ eine weitere Normalisierung von $(X, \mathfrak{A})$ dar, so existiert eine topologische Abbildung $\tau : \tilde{X}^* \to X^*$, wobei $\tilde{\varrho} = \varrho \circ \tau$ ist.*

Auf X^* gibt es genau eine normale komplexe Struktur $\mathfrak{A}^*$ (β_n-Struktur), so daß die Abbildung $\varrho : X^* \to X$ holomorph ist.

Bei der Untersuchung von Quotienten komplexer Räume nach komplexen Lieschen Automorphismengruppen wird es einem nahegelegt, den Begriff des komplexen Raumes leicht zu verallgemeinern.

---

[9]) Siehe [7], Seite 283.
[10]) Siehe [7], Seite 281, Definition 31.

Definition 8: *Unter einem pseudo-komplexen*[11]) *Raum verstehen wir einen geringten Raum* $(X, \mathfrak{A})$, *für den nur Bedingung 2 von Definition 5 gilt.*

Ist $(X, \mathfrak{A})$ ein pseudo-komplexer Raum, so sollen die auf X definierten $\mathfrak{A}$-morphen Funktionen wieder holomorph genannt werden. Desgleichen sei ein Homomorphismus eines pseudo-komplexen Raumes auf einen anderen als holomorphe Abbildung bezeichnet.

Es gilt:

e) *Stellt* $\{U_i : i \in I\}$ *eine offene Überdeckung des topologischen Raumes* X *dar und gibt es für jedes* $i \in I$ *eine topologische Abbildung* φ_i *von* U_i *auf eine analytische Menge* $(M_i, \mathcal{O}(M_i))$ *eines Bereiches* B_i *eines komplexen Zahlenraumes, so daß alle Abbildungen* $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$, $i, j \in I$, *biholomorph sind, dann wird hierdurch genau eine pseudo-komplexe Struktur* $\mathfrak{A}$ *auf* X *erzeugt, derart, daß alle Paare* (U_i, φ_i), $i, j \in I$, *pseudo-komplexe Karten auf* X *darstellen.*

§ 2. Quotienten geringter Räume

Es sei $(X, \mathfrak{A})$ ein geringter Raum und R eine Äquivalenzrelation auf X. Durch R wird eine Untergarbe $\mathfrak{A}_R$ von $\mathfrak{A}$ ausgezeichnet, die genau aus den Keimen von lokalen $\mathfrak{A}$-morphen R-invarianten Funktionen auf X besteht. Ist U eine offene Menge von X, dann bezeichnen wir den Ring der $\mathfrak{A}$-morphen R-invarianten Funktionen auf U mit R_U. Liegt V offen in U, so sei r_V^U der übliche Beschränkungshomomorphismus. Die Menge aller Paare $\{(R_U, r_V^U)\}$ stellt ein Garbendatum für $\mathfrak{A}_R$ dar.

X/R sei der Quotientenraum von X nach R und $\pi : X \to X/R$ bezeichne die kanonische Projektion. X/R läßt sich auf kanonische Weise zu einem geringten Raum $(X/R, \mathfrak{A}/R)$ machen. Die *Strukturgarbe* $\mathfrak{A}/R$ wird durch das folgende Garbendatum $\{(F_U, f_V^U)\}$ erzeugt. Dabei ist F_U der Ring der stetigen komplexwertigen Funktionen f auf einer offenen Teilmenge U von X/R, für die $f \circ \pi \in H^0(\pi^{-1}(U), \mathfrak{A})$. Liegt V offen in U, so bezeichnet f_V^U die übliche Beschränkungsabbildung. Damit ist dann sofort klar, daß gilt:

Satz 1: *Die kanonische Projektion* $\pi : (X, \mathfrak{A}) \to (X/R, \mathfrak{A}/R)$ *ist ein Homomorphismus, und zwar stellt für alle* $x \in X$ *der durch* π *induzierte Ringhomomorphismus* $\pi'_x : (\mathfrak{A}/R)_{\pi(x)} \to \mathfrak{A}_x$ *einen Ringhomomorphismus in* $(\mathfrak{A}_R)_x$ *dar.*

Nur in speziellen Fällen ist π'_x ein Ringisomorphismus von $(\mathfrak{A}/R)_{\pi(x)}$ auf $(\mathfrak{A}_R)_x$. Wir werden uns mit dieser Frage gegen Ende dieses Abschnittes noch weiter beschäftigen.

Im folgenden denken wir uns den Quotienten X/R eines geringten Raumes $(X, \mathfrak{A})$ nach einer Äquivalenzrelation R stets mit der geringten Struktur $\mathfrak{A}/R$ versehen.

Es gilt:

Satz 2: $(X, \mathfrak{A})$ *sei ein geringter Raum,* f *stelle eine Abbildung des Quotientenraumes* $(X/R, \mathfrak{A}/R)$ *in einen geringten Raum* $(Y, \mathfrak{B})$ *dar.* f *ist genau dann ein Homomorphismus, wenn* $f \circ \pi$ *ein Homomorphismus von* $(X, \mathfrak{A})$ *in* $(Y, \mathfrak{B})$ *ist.*

---

[11]) Vgl. [11], Definition 5.

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar. Ist umgekehrt $f \circ \pi$ ein Homomorphismus, so ist f eine stetige[12]) Abbildung und es gilt für jede auf einer offenen Teilmenge U von Y $\mathfrak{B}$-morphe Funktion g, daß die Funktion $g \circ f \circ \pi$ auf $\pi^{-1}(f^{-1}(U))$ $\mathfrak{A}$-morph ist. Aus der Definition der geringten Struktur $\mathfrak{A}/R$ folgt dann sofort, daß die Funktion $g \circ f$ $(\mathfrak{A}/R)$-morph auf $f^{-1}(U)$ ist.

Korollar 1: *$(X, \mathfrak{A})$ und $(Y, \mathfrak{B})$ seien zwei geringte Räume mit den Äquivalenzrelationen R bzw. S. f sei ein Homomorphismus von $(X, \mathfrak{A})$ in $(Y, \mathfrak{B})$, der mit den Äquivalenzrelationen R und S verträglich ist. Die durch f induzierte*[13]) *Abbildung f^* von $(X/R, \mathfrak{A}/R)$ in $(Y/S, \mathfrak{B}/S)$ ist ein Homomorphismus.*

Beweis: $\varphi : X \to X/R$ und $\psi : Y \to Y/S$ seien die kanonischen Projektionsabbildungen (Homomorphismen). Dann gilt per definitionem: $f^* \circ \varphi = \psi \circ f$. Da aber ψ und f und folglich auch $\psi \circ f$ Homomorphismen sind, so ist nach Satz 2 die Abbildung f^* ebenfalls ein Homomorphismus.

Satz 3: *f sei ein Homomorphismus von $(X, \mathfrak{A})$ auf $(Y, \mathfrak{B})$. R sei die Äquivalenzrelation, die durch $f(x') = f(x'')$, $x', x'' \in X$, gegeben ist. Es existiere ferner ein Homomorphismus s von $(Y, \mathfrak{B})$ in $(X, \mathfrak{A})$, so daß $f \circ s$ die identische Abbildung von Y auf sich ist. Dann ist die durch f induzierte Abbildung f^* von $(X/R, \mathfrak{A}/R)$ auf $(Y, \mathfrak{B})$ ein Isomorphismus und s stellt einen Isomorphismus von $(Y, \mathfrak{B})$ auf $\big(s(Y), \mathfrak{A}(s(Y))\big)$*[14]) *dar.*

Beweis: Bezeichnen wir mit φ die kanonische Projektion von $(X, \mathfrak{A})$ auf $(X/R, \mathfrak{A}/R)$, so ist nach Satz 2 mit $f = f^* \circ \varphi$ auch f^* ein Homomorphismus. $\varphi \circ s$ stellt ebenfalls einen Homomorphismus dar. Da f^* und $\varphi \circ s$ zueinander invers sind, so ist f^* ein Isomorphismus.

Die Injektion $i : s(Y) \to X$ ist ein Homomorphismus. Somit stellt $f \circ i$ eine eineindeutige homomorphe Abbildung von $\big(s(Y), \mathfrak{A}(s(Y))\big)$ auf $(Y, \mathfrak{B})$ dar. Andererseits induziert der Homomorphismus $s : (Y, \mathfrak{B}) \to (X, \mathfrak{A})$ einen Homomorphismus von $(Y, \mathfrak{B})$ auf $\big(s(Y), \mathfrak{A}(s(Y))\big)$, der wieder mit s bezeichnet werden soll. Da $f \circ i$ und s zueinander invers sind, so ist s ein Isomorphismus von $(Y, \mathfrak{B})$ auf $\big(s(Y), \mathfrak{A}(s(Y))\big)$.

Definition 9: *$(X, \mathfrak{A})$ sei ein geringter Raum und R eine Äquivalenzrelation auf X, φ bezeichne die kanonische Projektion von $(X, \mathfrak{A})$ auf $(X/R, \mathfrak{A}/R)$. Unter einem $\mathfrak{A}$-morphen Schnitt in $(X, \mathfrak{A})$ bezüglich der Relation R verstehen wir einen Homomorphismus s von $(X/R, \mathfrak{A}/R)$ in $(X, \mathfrak{A})$, so daß $\varphi \circ s$ gleich der identischen Abbildung von X/R auf sich ist.*

Korollar 2: *Ist s ein $\mathfrak{A}$-morpher Schnitt in $(X, \mathfrak{A})$ bezüglich der Relation R, so ist $(X/R, \mathfrak{A}/R)$ isomorph zu $(X', \mathfrak{A}(X'))$ mit $X' = s(X/R) \subset X$.*

Satz 4: *R und S seien Äquivalenzrelationen auf dem geringten Raum $(X, \mathfrak{A})$. R sei in S enthalten* (R sei gröber als S). *S/R bezeichne die Quotientenrelation*

---

[12]) Siehe [2], § 9, N° 2, Theorem 1.

[13]) Siehe [2], § 9, N° 2, Corollaire.

[14]) $\mathfrak{A}(s(Y))$ ist die durch $\mathfrak{A}$ auf natürliche Weise induzierte geringte Struktur auf $s(Y) \subset X$.

auf dem Quotientenraum $(X/R, \mathfrak{A}/R)$. *Dann ist die kanonische*[15]) *Abbildung* p *des Quotientenraumes* $(X/S, \mathfrak{A}/S)$ *auf den Quotientenraum* $[(X/R)/(S/R), (\mathfrak{A}/R)/(S/R)]$ *ein Isomorphismus.*

Beweis: $\varphi:(X,\mathfrak{A}) \to (X/R,\mathfrak{A}/R)$, $\psi:(X/R,\mathfrak{A}/R) \to [(X/R)/(S/R),(\mathfrak{A}/R)/(S/R)]$ und $\pi:(X, \mathfrak{A}) \to (X/S, \mathfrak{A}/S)$ seien die kanonischen Projektionen. Die Abbildung p ist topologisch[15]) und genügt der Gleichung: $p \circ \pi = \psi \circ \varphi$. Mit ψ und φ ist auch $\psi \circ \varphi$ ein Homomorphismus. Nach Satz 2 ist dann mit $p \circ \pi$ auch p ein Homomorphismus. p^{-1} genügt der Gleichung: $\pi = p^{-1} \circ \psi \circ \varphi$. Zweimalige Anwendung von Satz 2 ergibt, daß $p^{-1} \circ \psi$ und p^{-1} Homomorphismen sind. p ist also ein Isomorphismus, wie behauptet wurde.

Satz 5: *R und T seien Äquivalenzrelationen auf dem geringten Raum* $(X, \mathfrak{A})$. $S = R \circ T$[16]) *sei wieder eine Äquivalenzrelation, dann sind die Quotientenräume* $[(X/R)/(S/R), (\mathfrak{A}/R)/(S/R)]$ *und* $[(X/T)/(S/T), (\mathfrak{A}/T)/(S/T)]$ *zueinander isomorph.*

Beweis: Die beiden Quotientenräume sind isomorph zu $(X/S, \mathfrak{A}/S)$.

Sind $(X, \mathfrak{A})$ und $(Y, \mathfrak{B})$ zwei geringte Räume, so kann man auf dem Cartesischen Produkt $X \times Y$ (versehen mit der Produkttopologie) wieder eine geringte Struktur definieren[17]). Sind U bzw. V offene Mengen in X bzw. Y, so bezeichne $C(U \times V)$ die Menge aller stetigen komplexwertigen Funktionen $f(x, y)$ auf $U \times V$, für die bei festem $x_0 \in U$ bzw. $y_0 \in V$ gilt: $f(x_0, y) \in H^0(V, \mathfrak{B})$ bzw. $f(x, y_0) \in H^0(U, \mathfrak{A})$. Zusammen mit den üblichen Beschränkungshomomorphismen definieren die $C(U \times V)$, wobei U und V alle offenen Mengen von X bzw. Y durchlaufen, eine geringte Struktur $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ auf $X \times Y$.

R und S seien Äquivalenzrelationen auf X bzw. Y. $\varphi:(X,\mathfrak{A}) \to (X/R, \mathfrak{A}/R)$ und $\psi:(Y, \mathfrak{B}) \to (Y/S, \mathfrak{B}/S)$ seien die kanonischen Projektionen. $(\mathfrak{A}/R) \times (\mathfrak{B}/S)$ bezeichne die durch $\mathfrak{A}/R$ und $\mathfrak{B}/S$ induzierte geringte Struktur auf $(X/R) \times \times (Y/S)$. Wir behaupten nun, daß die Abbildung $(\varphi, \psi):(X \times Y, \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \to \to ((X/R) \times (Y/S), (\mathfrak{A}/R) \times (\mathfrak{B}/S))$ ein Homomorphismus ist. Es ist klar, daß (φ, ψ) eine stetige Abbildung darstellt. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß für alle $(x, y) \in X \times Y$ die durch (φ, ψ) induzierte Zuordnung

$$(\varphi, \psi)'_{(x,y)}: f_{(\varphi(x),\psi(y))} \to f_{(\varphi(x),\psi(y))} \circ (\varphi, \psi), \quad f_{(\varphi(x),\psi(y))} \in \mathfrak{C}'_{(\varphi(x),\psi(y))},$$

eine Abbildung in $\mathfrak{C}_{(x,y)}$ ist. Dabei sei zur Abkürzung $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ und $(\mathfrak{A}/R) \times (\mathfrak{B}/S) = \mathfrak{C}'$ gesetzt. $f_{(\varphi(x),\psi(y))}$ wird repräsentiert durch eine Funktion $f_{U \times V} \in H^0(U \times V, \mathfrak{C}')$, wobei U und V offene Mengen in X/R bzw. Y/S sind mit $(\varphi(x), \psi(y)) \in U \times V$. Es gilt:

$$f_{\varphi^{-1}(U) \times \psi^{-1}(V)}(x', y'_0) := f_{U \times V}(\varphi(x'), \psi(y'_0))$$

ist für festes y'_0 aus $\psi^{-1}(V)$ eine $\mathfrak{A}$-morphe Funktion in der Variablen x' aus $\varphi^{-1}(U)$, da $f_{U \times V}$ für einen festen Wert der zweiten Variablen eine $(\mathfrak{A}/R)$-morphe Funktion der ersten ist. Entsprechend zeigt man, daß $f_{\varphi^{-1}(U) \times \psi^{-1}(V)}(x'_0, y')$

[15]) Vgl. [2], § 9, N° 4, Proposition 3.

[16]) $x_1, x_2 \in X$ stehen per definitionem genau dann in der S-Relation, wenn es ein $x \in X$ gibt, so daß $x_1 \, T \, x$ und $x \, R \, x_2$ gilt. Im allgemeinen ist S keine Äquivalenzrelation. Vgl. [12].

[17]) Vgl. [7], Seite 275/276.

für festes $x_0' \in \varphi^{-1}(U)$ eine $\mathfrak{B}$-morphe Funktion in der Variablen y' ist. $f_{\varphi^{-1}(U) \times \psi^{-1}(V)}$ repräsentiert somit einen Funktionskeim aus $\mathfrak{C}_{(x,y)}$.

Da die Äquivalenzrelation $(\varphi, \psi)(x_1, y_1) = (\varphi, \psi)(x_2, y_2)$ auf $X \times Y$ gleich der Produktrelation $R \times S$ ist, so stellt die durch (φ, ψ) induzierte kanonische Abbildung

$$(\varphi, \psi)/(R \times S) : [(X \times Y)/(R \times S), \mathfrak{C}/(R \times S)] \to [(X/R) \times (Y/S), \mathfrak{C}']$$

ebenfalls einen Homomorphismus dar.

Die Abbildung $(\varphi, \psi)/(R \times S)$ ist zwar eineindeutig und stetig, aber im allgemeinen nicht umkehrbar stetig[18]). Sind dagegen R und S offene[19]) Relationen, so stellt $(\varphi, \psi)/(R \times S)$ eine topologische Abbildung dar[20]). $(R \times S)$ ist wieder eine offene Relation. Es gilt in diesem Fall dann auch:

Satz 6: *Sind R und S offene Äquivalenzrelationen auf den geringten Räumen $(X, \mathfrak{A})$ bzw. $(Y, \mathfrak{B})$, so ist die Abbildung: $(\varphi, \psi)/(R \times S) : [(X \times Y)/(R \times S), (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})/(R \times S)] \to [(X/R) \times (Y/S), (\mathfrak{A}/R) \times (\mathfrak{B}/S)]$ ein Isomorphismus.*

Beweis: Es ist nur noch zu zeigen, daß $[(\varphi, \psi)/(R \times S)]^{-1}$ ein Homomorphismus ist. Bezeichnen wir die kanonische Projektion von $X \times Y$ auf $(X \times Y)/(R \times S)$ mit p, so gilt: $(\varphi, \psi)/(R \times S) \circ p = (\varphi, \psi)$ oder $[(\varphi, \psi)/(R \times S)]^{-1} = p \circ (\varphi, \psi)^{-1}$. Sei nun $f_{p(x,y)}$, $(x, y) \in X \times Y$, aus $(\mathfrak{C}/(R \times S))_{p(x,y)}$, so ist also zu zeigen, daß $f_{p(x,y)} \circ (p \circ (\varphi, \psi)^{-1})$ ans $\mathfrak{C}'_{(\varphi(x), \psi(\varphi))}$ ist. $f_{p(x,y)}$ sei durch $f_{p(U \times V)} \in H^0(p(U \times V), \mathfrak{C}/(R \times S))$ repräsentiert, wobei $U \times V$ eine offene, $(R \times S)$-saturierte Teilmenge von $X \times Y$ ist. $f_{U \times V} := f_{p(U \times V)} \circ p$ ist dann per definitionem aus $H^0(U \times V, \mathfrak{C})$. $f_{\varphi(U) \times \psi(V)} := f_{U \times V} \circ (\varphi, \psi)^{-1}$ ist eine in $\varphi(U) \times \psi(V)$ eindeutig definierte komplexwertige Funktion, da $f_{U \times V}$ eine $(R \times S)$-invariante Funktion darstellt. Da die Abbildung (φ, ψ) offen ist, so ist die Funktion $f_{\varphi(U) \times \psi(V)}$ stetig. Es gilt: $f_{\varphi(U) \times \psi(V)}(\varphi(x'), \psi(y')) = f_{U \times V}(x', y')$. Da $f_{U \times V}(x', y_0')$ bei festem $y_0' \in V$ aus $H^0(U, \mathfrak{A})$ ist, so stellt $f_{\varphi(U) \times \psi(V)}$ für den festen Wert $v_0 = \psi(y_0')$ der Variablen $v = \psi(y')$ eine $(\mathfrak{A}/R)$-morphe Funktion in der Variablen $u = \varphi(x')$ dar. Entsprechend gilt, daß $f_{\varphi(U) \times \psi(V)}$ für festes u_0 eine $(\mathfrak{B}/S)$-morphe Funktion in der Variablen v ist. $f_{\varphi(U) \times \psi(V)}$ ist also eine $\mathfrak{C}'$-morphe Funktion auf $\varphi(U) \times \psi(V)$. Der durch $f_{\varphi(U) \times \psi(V)}$ erzeugte Keim $f_{(\varphi(x), \psi(y))}$ ist somit aus $\mathfrak{C}'_{(\varphi(x), \psi(y))}$ und es gilt: $f_{(\varphi(x), \psi(y))} = f_{p(x,y)} \circ (p \circ (\varphi, \psi)^{-1})$.

R sei eine Äquivalenzrelation auf dem geringten Raum $(X, \mathfrak{A})$, π bezeichne die kanonische Projektion von $(X, \mathfrak{A})$ auf $(X/R, \mathfrak{A}/R)$. Der durch π für jeden Punkt $x \in X$ induzierte Ringhomomorphismus $\pi_x' : (\mathfrak{A}/R)_{\pi(x)} \to \mathfrak{A}_x$ ist, wie zu Beginn dieses Abschnitts erwähnt wurde, im allgemeinen kein Ringisomorphismus auf $(\mathfrak{A}_R)_x \subset \mathfrak{A}_x$. Es gilt aber:

Satz 7: *Stellt R eine offene Relation auf dem geringten Raum $(X, \mathfrak{A})$ dar, so sind die Abbildungen π_x' für alle $x \in X$ Ringisomorphismen von $(\mathfrak{A}/R)_{\pi(x)}$ in $(\mathfrak{A}_R)_x \subset \mathfrak{A}_x$.*

---

[18]) Siehe [2], Seite 90, Übungsaufgabe 11.

[19]) Eine Äquivalenzrelation R auf dem topologischen Raum X heißt offen, wenn die kanonische Projektion $\pi : X \to X/R$ offen ist.

[20]) Siehe [2], § 9, N° 8, Proposition 9.

Beweis: Um die Eineindeutigkeit der Abbildung $\pi'_x: (\mathfrak{A}/R)_{\pi(x)} \to \mathfrak{A}_x$ zu zeigen, nehmen wir an, daß der Keim $f_{\pi(x)} \in (\mathfrak{A}/R)_{\pi(x)}$ durch π'_x auf $f_{\pi(x)} \circ \pi = O_x$ aus $\mathfrak{A}_x$ abgebildet wird, und beweisen dann, daß auch $f_{\pi(x)}$ gleich dem Nullelement $O_{\pi(x)}$ aus $(\mathfrak{A}/R)_{\pi(x)}$ ist. $f_{\pi(x)}$ besitzt einen Repräsentanten $f_W \in H^0(W, \mathfrak{A}/R)$, wobei W eine Umgebung von $\pi(x)$ ist. $f_{\pi(x)} \circ \pi = O_x$ bedeutet nichts anderes, als daß $f_W \circ \pi \in H^0(\pi^{-1}(W), \mathfrak{A})$ das Nullelement von $\mathfrak{A}_x$ repräsentiert. Es gibt also eine Umgebung $U \subset \pi^{-1}(W)$, so daß $(f_W \circ \pi) \mid U$ gleich dem Nullelement $O_U \in H^0(U, \mathfrak{A})$ ist. Da R eine offene Relation ist, so ist $\pi(U) \subset W$ offen und $f_{\pi(U)} = f_W \mid \pi(U)$ repräsentiert ebenfalls $f_{\pi(x)}$. Es gilt $f_{\pi(U)} \circ \pi = O_U$, d. h. $f_{\pi(U)}$ ist gleich dem Nullelement $O_{\pi(U)}$ aus $H^0(\pi(U), \mathfrak{A}/R)$.

Wir wollen jetzt ein Kriterium dafür angeben, wann die Abbildungen π'_x, $x \in X$, *Ringisomorphismen* von $(\mathfrak{A}/R)_{\pi(x)}$ *auf* $(\mathfrak{A}_R)_x$ sind.

Definition 10: *R heißt eine $\mathfrak{A}$-Relation auf dem geringten Raum $(X, \mathfrak{A})$, wenn R offen ist und wenn zu jeder R-invarianten, $\mathfrak{A}$-morphen Funktion f_U auf einer offenen Teilmenge U von X eine R-invariante, $\mathfrak{A}$-morphe Funktion $f_{\mathscr{H}_R(U)}$ auf $\mathscr{H}_R(U)$ existiert, so daß $f_{\mathscr{H}_R(U)} \mid U = f_U$ ist. Dabei ist $\mathscr{H}_R(U)$ die saturierte Hülle von U bezüglich der Äquivalenzrelation R.*

Es ist hierzu zu bemerken, daß die Fortsetzung $f_{\mathscr{H}_R(U)}$ von f_U in $\mathscr{H}_R(U)$, falls sie existiert, eindeutig bestimmt ist.

Es gilt:

Satz 8: *Ist R eine $\mathfrak{A}$-Relation auf dem geringten Raum $(X, \mathfrak{A})$, und bezeichnet π die kanonische Projektion von $(X, \mathfrak{A})$ auf $(X/R, \mathfrak{A}/R)$, dann gibt es zu jeder $\mathfrak{A}$-morphen, R-invarianten Funktion f_U auf einer beliebigen offenen Teilmenge U von X eine $(\mathfrak{A}/R)$-morphe Funktion $f_{\pi(U)}$ auf der Projektion $\pi(U)$ von U im Quotientenraum $(X/R, \mathfrak{A}/R)$, so daß gilt: $f_{\pi(U)} \circ \pi = f_U$.*

Beweis: $f_{\mathscr{H}_R(U)}$ sei die eindeutig bestimmte $\mathfrak{A}$-morphe, R-invariante Fortsetzung von f_U in $\mathscr{H}_R(U)$. $f_{\pi(U)} := f_{\mathscr{H}_R(U)} \circ \pi^{-1}$ ist eindeutig definiert und stetig, da π offen ist. Es gilt: $f_{\pi(U)} \circ \pi = f_{\mathscr{H}_R(U)}$. Per definitionem ist somit $f_{\pi(U)}$ eine $(\mathfrak{A}/R)$-morphe Funktion auf $\pi(U)$.

Als unmittelbare Folge von Satz 8 ergibt sich:

Satz 8': *Ist R eine $\mathfrak{A}$-Relation auf dem geringten Raum $(X, \mathfrak{A})$, so sind die durch die kanonische Projektion $\pi: (X, \mathfrak{A}) \to (X/R, \mathfrak{A}/R)$ induzierten Ringhomomorphismen $\pi'_x: (\mathfrak{A}/R)_{\pi(x)} \to \mathfrak{A}_x$, $x \in X$, Ringisomorphismen auf $(\mathfrak{A}_R)_x$.*

Beweis: Wir zeigen, daß jeder Funktionskeim $f_x \in (\mathfrak{A}_R)_x$ $x \in X$, als π'_x-Bild auftritt. f_x sei repräsentiert durch eine R-invariante, $\mathfrak{A}$-morphe Funktion f_U auf einer Umgebung U von x. Nach Satz 8 gibt es eine $(\mathfrak{A}/R)$-morphe Funktion $f_{\pi(U)}$ auf $\pi(U)$, so daß $f_{\pi(U)} \circ \pi = f_U$. $f_{\pi(U)}$ definiert einen Funktionskeim $f_{\pi(x)}$ aus $(\mathfrak{A}/R)_{\pi(x)}$ und es ist $\pi'_x(f_{\pi(x)}) = f_{\pi(x)} \circ \pi = f_x$.

Führt man den Begriff des Urbildes[21]) einer Garbe ein, so läßt sich Satz 8' auch folgendermaßen formulieren:

Satz 8'': *Ist R eine $\mathfrak{A}$-Relation auf dem geringten Raum $(X, \mathfrak{A})$ und bezeichnet π die kanonische Projektion von $(X, \mathfrak{A})$ auf $(X/R, \mathfrak{A}/R)$, so ist die*

[21]) Siehe [6] und [8].

Urbildgarbe $\pi^{-1}(\mathfrak{A}/R)$ von $\mathfrak{A}/R$ bezüglich der Abbildung π isomorph zur Garbe $\mathfrak{A}_R$ von Keimen lokaler R-invarianter $\mathfrak{A}$-morpher Funktionen auf X.

Im folgenden wollen wir uns nur noch für solche Relationen eines geringten Raumes $(X, \mathfrak{A})$ interessieren, die durch Gruppen von Homöomorphismen von X auf sich gegeben sind.

Definition 11: *Ist G eine Gruppe von Homöomorphismen des topologischen Raums X auf sich, so sollen zwei Punkte x' und x'' von X genau dann G-äquivalent heißen, wenn es ein Element $g \in G$ gibt, so daß $x' = g \circ x''$ ist. Die durch die Gruppe G gegebene Äquivalenzrelation sei wieder mit G bezeichnet.*

Die saturierte Hülle $\mathscr{H}_G(A)$ einer Teilmenge A des topologischen Raumes X bezüglich der Homöomorphismengruppe G ist nichts anderes als $G \circ A :=$ $:= \{g \circ a : (g, a) \in G \times A\}$. Ist A offen, so ist auch die saturierte Hülle $\mathscr{H}_G(A)$ als Vereinigung der offenen Mengen $g \circ A$, $g \in G$, wieder offen. Folglich stellt die Projektionsabbildung $\pi : X \to X/G$ eine offene Abbildung dar, d. h. die Äquivalenzrelation G ist offen. Es gelten also für die durch Homöomorphismengruppen gegebenen Äquivalenzrelationen die Sätze 6 und 7 dieses Abschnitts.

Definition 12: *Unter einem Automorphismus eines geringten Raumes $(X, \mathfrak{A})$ verstehen wir einen Isomorphismus von $(X, \mathfrak{A})$ auf sich.*

Es gilt:

Satz 9: *Eine Gruppe G von Automorphismen eines geringten Raumes $(X, \mathfrak{A})$ stellt stets eine $\mathfrak{A}$-Relation dar.*

Beweis: Sei U eine offene Menge in X und f_U eine $\mathfrak{A}$-morphe, G-invariante Funktion auf U. Für jeden Punkt y aus $\mathscr{H}_G(U)$ gibt es eine Transformation $g \in G$, so daß $g(y) \in U$. Setzt man $f_{\mathscr{H}_G(U)}(y) := f_U(g(y))$, so wird hierdurch eindeutig (d. h. unabhängig von der Wahl von g) eine G-invariante Funktion auf $\mathscr{H}_G(U)$ definiert mit der Eigenschaft, daß $f_{\mathscr{H}_G(U)} | U = f_U$ ist. Um zu zeigen, daß $f_{\mathscr{H}_G(U)}$ eine $\mathfrak{A}$-morphe Funktion ist, überlegt man sich, daß jeder Punkt $y \in \mathscr{H}_G(U)$ eine Umgebung $V \subset \mathscr{H}_G(U)$ besitzt, so daß für eine bestimmte Transformation $g \in G$ gilt: $g(V) \subset U$. Da f_U $\mathfrak{A}$-morph auf $g(V)$ ist und g ein Automorphismus ist, so stellt $f_U(g(y'))$, $y' \in V$, per definitionem eine $\mathfrak{A}$-morphe Funktion auf V dar.

Für Automorphismengruppen eines geringten Raumes gelten also speziell die Sätze 8, 8′ und 8″.

Zum Abschluß dieses Paragraphen sollen solche Automorphismengruppen G eines geringten Raumes $(X, \mathfrak{A})$ studiert werden, die selber wieder eine geringte Struktur $\mathfrak{B}$ besitzen.

Definition 13: *Unter einer geringten Gruppe $(G, \mathfrak{B})$ verstehen wir eine topologische Gruppe G mit einer geringten Struktur $\mathfrak{B}$, so daß die Abbildung $\psi : G \times G \to G$, die jedem Paar $(g_1, g_2) \in G \times G$[22]) das Element $g_1 \circ g_2^{-1}$ zuordnet, ein Homomorphismus ist.*

---

[22]) $G \times G$ ist dabei mit der Produktstruktur $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ versehen.

Ist die geringte Gruppe $(G, \mathfrak{B})$ gleichzeitig eine Automorphismengruppe eines geringten Raumes $(X, \mathfrak{A})$ und ist die Abbildung $\Phi : G \times X$[23]$) \to X$, gegeben durch $\Phi : (g, x) \to g \circ x$, ein Homomorphismus, so sagen wir, daß $(G, \mathfrak{B})$ auf $(X, \mathfrak{A})$ strukturtreu operiert.

Es gilt der folgende Satz:

Satz 10: *Operiert die geringte Automorphismengruppe $(G, \mathfrak{B})$ strukturtreu auf dem geringten Raum $(X, \mathfrak{A})$ und stellt R eine offene Äquivalenzrelation auf X dar, die gröber*[24]*) als G ist, dann operiert $(G, \mathfrak{B})$ auf natürliche Weise auch strukturtreu auf $(X/R, \mathfrak{A}/R)$.*

Beweis: Nach Korollar 1 induziert der Homomorphismus

$$\Phi : (G \times X, \mathfrak{B} \times \mathfrak{A}) \to (X, \mathfrak{A})$$

einen Homomorphismus

$$\Phi^* : ((G \times X)/(1 \times R), (\mathfrak{B} \times \mathfrak{A})/(1 \times R)) \to (X/R, \mathfrak{A}/R).$$

Da $1 \times R$ eine offene Äquivalenzrelation auf $G \times X$ darstellt, so gibt es nach Satz 6 einen kanonischen Isomorphismus σ von $(G \times (X/R), \mathfrak{B} \times (\mathfrak{A}/R))$ auf $((G \times X)/(1 \times R), (\mathfrak{B} \times \mathfrak{A})/(1 \times R))$.

$$\Phi_1 := \Phi^* \circ \sigma : (G \times (X/R), \mathfrak{B} \times (\mathfrak{A}/R)) \to (X/R, \mathfrak{A}/R)$$

ist folglich ein Homomorphismus.

$[x]_R$ bezeichne die Äquivalenzklasse aus X/R, in der $x \in X$ liegt, g sei ein Element aus G. Definiert man $g \mathbin{\square} [x]_R := \Phi_1(g, [x]_R)$, so stellt g bezüglich der Operation $\square$ einen Endomorphismus von $(X/R, \mathfrak{A}/R)$ dar. Aus der Verträglichkeit von Φ mit $1 \times R$ und R folgt:

$$g \mathbin{\square} [x]_R = (\Phi^* \circ \sigma)\,(g, [x]_R) = \Phi^*[g, x]_{(1 \times R)} = [\Phi(g, x)]_R = [g \circ x]_R\,.$$

Daraus ergibt sich sofort, daß G bezüglich der Operation $\square$ eine Automorphismengruppe von $(X/R, \mathfrak{A}/R)$ darstellt. Da Φ_1 ein Homomorphismus ist, so operiert $(G, \mathfrak{B})$ strukturtreu auf $(X/R, \mathfrak{A}/R)$.

§ 3. Quotienten komplexer Räume nach komplexen Lieschen Automorphismengruppen

Ist X ein komplexer Raum mit der Strukturgarbe $\mathfrak{A}$, dann sind nach unserer Terminologie die Automorphismen von $(X, \mathfrak{A})$ nichts anderes als die biholomorphen Abbildungen von $(X, \mathfrak{A})$ auf sich. Es soll in diesem Abschnitt untersucht werden, unter welchen Bedingungen der Quotient eines komplexen Raumes $(X, \mathfrak{A})$ nach einer Automorphismengruppe G wieder ein komplexer Raum ist, und zwar bezüglich der durch $\mathfrak{A}$ induzierten geringten Struktur $\mathfrak{A}/G$. Von H. Cartan wurde der folgende Satz bewiesen[25]):

---

[23]) $G \times X$ ist dabei mit der Produktstruktur $\mathfrak{B} \times \mathfrak{A}$ versehen.

[24]) Das heißt die Abbildung $\Phi : G \times X \to X$ ist mit den Äquivalenzrelationen $1 \times R$ und R auf $G \times X$ bzw. X verträglich.

[25]) Siehe [4], Theorem 1, und [5], Theorem 4.

Satz 11: *Ist* $(X, \mathfrak{A})$ *ein komplexer Raum und* G *eine Automorphismengruppe von* $(X, \mathfrak{A})$, *die auf* $(X, \mathfrak{A})$ *eigentlich diskontinuierlich operiert, dann ist der Quotientenraum* $(X/G, \mathfrak{A}/G)$ *wieder ein komplexer Raum. Ist* $(X, \mathfrak{A})$ *normal, so auch* $(X/G, \mathfrak{A}/G)$.

Dabei sagt man:

Definition 14: *Eine Gruppe* G *von Homöomorphismen eines topologischen Raumes* X *auf sich operiert eigentlich diskontinuierlich auf* X, *wenn folgende Bedingungen gelten: (a) Zwei nicht* G*-äquivalente Punkte* x' *und* x'' *aus* X *besitzen stets Umgebungen* U' *bzw.* U'', *so daß* $g(U')$ *und* U'' *für alle* $g \in G$ *disjunkt sind. (b) Jeder Punkt* $x \in X$ *besitzt eine offene Umgebung* U_x *(invariant gegenüber der Isotropiegruppe* G_x*), so daß aus* $g \in G$, $x' \in U_x$, $g \circ x' \in U_x$ *folgt:* $g \in G_x$. *(c) Für jeden Punkt* $x \in X$ *ist die Isotropiegruppe* G_x *endlich.*

Im folgenden soll eine Verallgemeinerung des obigen Satzes für Quotienten komplexer Räume nach komplexen Lieschen Automorphismengruppen bewiesen werden.

Eine topologische Gruppe L von Automorphismen eines komplexen Raumes $(X, \mathfrak{A})$ heißt eine komplexe Liesche Automorphismengruppe, wenn sie eine komplexe Struktur $\mathfrak{B}$ besitzt, so daß gilt: (1) L, versehen mit der Struktur $\mathfrak{B}$, stellt eine komplexe Liesche Gruppe dar. (2) Die Abbildung $\Phi: L \times X \to X$, gegeben durch $\Phi: (g, x) \to g \circ x$, ist holomorph.

Als Verallgemeinerung des Begriffes der eigentlich diskontinuierlichen Automorphismengruppe definieren wir:

Definition 15: *Eine komplexe Liesche Automorphismengruppe* L *eines komplexen Raumes* $(X, \mathfrak{A})$ *operiert separabel auf* $(X, \mathfrak{A})$, *wenn neben den Bedingungen (a) und (c) von Definition* 14 *noch gilt:*

(b') Jeder Punkt $x \in X$ *besitzt eine Umgebung* U_x, *und es gibt eine durch* x *laufende analytische Menge* s_x[26]) *in* U_x, *sowie eine Umgebung* V_ε *des identischen Automorphismus* ε *aus* L, *so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Durch die Zuordnung* $\Phi: (g, x') \to g \circ x'$ *wird* $V_\varepsilon \times s_x$ *biholomorph auf* U_x *abgebildet.*

2. s_x *ist invariant gegenüber der Isotropiegruppe* L_x *und aus* $g \in L$, $x' \in s_x$, $g \circ x' \in s_x$ *folgt:* $g \in L_x$.

Gelten nur die Bedingungen (b') und (c), so wollen wir sagen, daß L *schwach separabel auf* X *operiert.*

Es gilt der folgende Satz:

Satz 12: L *sei eine komplexe Liesche Automorphismengruppe eines komplexen Raumes* $(X, \mathfrak{A})$. *Operiert* L *separabel (bzw. schwach separabel) auf* $(X, \mathfrak{A})$, *so ist der Quotientenraum* $(X/L, \mathfrak{A}/L)$ *wieder ein komplexer Raum (bzw. ein pseudo-komplexer Raum). Ist* $(X, \mathfrak{A})$ *normal, so auch* $(X/L, \mathfrak{A}/L)$.

Aus den Sätzen 1, 2 und 8 über geringte Räume ergibt sich der folgende Zusatz zu Satz 12:

Zusatz: *A. Die kanonische Projektion* $\pi: (X, \mathfrak{A}) \to (X/L, \mathfrak{A}/L)$ *ist eine holomorphe Abbildung.*

---

[26]) Versehen mit der durch $\mathfrak{A}$ induzierten geringten Struktur $\mathfrak{A}(s_x)$.

B. Ist f_U eine L-invariante holomorphe Funktion auf einer beliebigen offenen Teilmenge U von X, so gibt es eine holomorphe Funktion $f_{\pi(U)}$ auf der Projektion $\pi(U)$ von U, so daß $f_{\pi(U)} \circ \pi = f_U$ ist.

C. Jede holomorphe Abbildung $f: (X, \mathfrak{A}) \to (Y, \mathfrak{B})$ von $(X, \mathfrak{A})$ in einen komplexen Raum $(Y, \mathfrak{B})$, die auf L-äquivalenten Punkten gleiche Werte annimmt, läßt sich durch π faktorisieren, d. h. es gibt eine holomorphe Abbildung $f^*: (X/L, \mathfrak{A}/L) \to (Y, \mathfrak{B})$, so daß $f = f^* \circ \pi$.

Es erweist sich als nützlich, Satz 12 zunächst für eine spezielle Klasse von komplexen Räumen zu beweisen, nämlich die komplexen L-Räume[27]) über beliebigen komplexen Räumen $(X, \mathfrak{A})$. Jeder komplexen Lieschen Gruppe L kann man auf folgende Weise eine Klasse von sogenannten L-Räumen zuordnen. $(X, \mathfrak{A})$ sei irgendein komplexer Raum, G eine endliche Untergruppe von L und h ein Gruppenhomomorphismus von G in die Gruppe $B(X)$ aller Automorphismen von $(X, \mathfrak{A})$. Der Produktraum $L \times X$ sei mit der durch die komplexen Strukturen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ von L bzw. X induzierten komplexen Struktur $\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{A}$ versehen. Dann induziert jedes Element $g \in G$ einen Automorphismus $\tau(g)$ von $(L \times X, \mathfrak{C})$, der durch die Zuordnung

$$\tau(g): (v, x) \to \big(v \circ g^{-1}, (h(g)) \circ x\big), \quad (v, x) \in L \times X,$$

definiert ist. Die Abbildung τ ist ein Isomorphismus von G in die Gruppe $B(L \times X)$ aller Automorphismen von $(L \times X, \mathfrak{C})$. $\tau(G)$ operiert eigentlich diskontinuierlich auf $L \times X$, da G endlich ist. Der Quotientenraum $((L \times X)/\tau(G), \mathfrak{C}/\tau(G))$ ist also ein komplexer Raum. Er ist normal, falls $(X, \mathfrak{A})$ normal ist. Ein so gewonnener komplexer Raum soll *komplexer L-Raum* über dem komplexen Raum $(X, \mathfrak{A})$ heißen.

Auf einem komplexen L-Raum $((L \times X)/\tau(G), \mathfrak{C}/\tau(G))$ operiert die komplexe Liesche Gruppe L auf natürliche Weise als komplexe Liesche Automorphismengruppe. Zunächst kann man jedes Element $v' \in L$ als einen Automorphismus von $(L \times X, \mathfrak{C})$ interpretieren, und zwar durch die Vorschrift $v': (v, x) \to (v' \circ v, x)$. Da die Operationsabbildung $\psi: L \times (L \times X) \to L \times X$, gegeben durch $\psi: (v', v, x) \to (v' \circ v, x)$, holomorph ist, so stellt L bezüglich der Operationsabbildung ψ eine komplexe Liesche Automorphismengruppe von $(L \times X, \mathfrak{C})$ dar. Für zwei Automorphismen $v' \in L$ und $\tau(g) \in \tau(G)$ von $(L \times X, \mathfrak{C})$ gilt:

$$\tau(g) \circ v' = v' \circ \tau(g)\,. \tag{1}$$

Folglich ist die Abbildung ψ mit den Äquivalenzrelationen $1 \times \tau(G)$ und $\tau(G)$ von $L \times (L \times X)$ bzw. $L \times X$ verträglich. Nach Satz 10 operiert dann $(L, \mathfrak{B})$ auch strukturtreu auf $((L \times X)/\tau(G), \mathfrak{C}/\tau(G))$, d. h. $(L, \mathfrak{B})$ stellt eine komplexe Liesche Automorphismengruppe des komplexen Raumes

$$((L \times X)/\tau(G), \mathfrak{C}/\tau(G))$$

dar. Die durch ψ induzierte Operationsabbildung

$$\psi_*: L \times ((L \times X)/\tau(G)) \to (L \times X)/\tau(G)$$

---

[27]) Vgl. [11], Seite 388.

kann durch

$$\psi_* : (v', [v, x]_{\tau(G)}) \to [v' \circ v, x]_{\tau(G)}$$

beschrieben werden, wobei $[v, x]_{\tau(G)}$ die Äquivalenzklasse aus $(L \times X)/\tau(G)$ bezeichnet, in der $(v, x) \in L \times X$ liegt.

Die holomorphe kanonische Projektionsabbildung

$$\hat{\tau} : (L \times X, \mathfrak{C}) \to ((L \times X)/\tau(G), \mathfrak{C}/\tau(G))$$

ist offen und lokal eineindeutig, somit auch lokal topologisch. Da die Garbe $\mathfrak{C}_{\tau(G)}$ der lokalen $\tau(G)$-invarianten, $\mathfrak{C}$-morphen Funktion auf $L \times X$ gleich $\mathfrak{C}$ selbst ist und auf Grund von Satz 8′ die durch $\hat{\tau}$ induzierten Ringhomomorphismen $\hat{\tau}'_{(v,x)} : (\mathfrak{C}/\tau(G))_{\hat{\tau}(v,x)} \to \mathfrak{C}_{(v,x)}$, $(v, x) \in L \times X$, surjektive Ringisomorphismen sind, so ist $\hat{\tau}$ lokal biholomorph.

Es sei noch angemerkt, daß $h(G)$ als endliche Automorphismengruppe von $(X, \mathfrak{A})$ eigentlich diskontinuierlich auf $(X, \mathfrak{A})$ operiert und somit $(X/h(G), \mathfrak{A}/h(G))$ wieder einen komplexen Raum darstellt.

Es gilt:

Satz 13: *$(L, \mathfrak{B})$ sei eine komplexe Liesche Gruppe und*

$$(X^*, \mathfrak{C}^*) := ((L \times X)/\tau(G), (\mathfrak{B} \times \mathfrak{A})/\tau(G))$$

ein komplexer L-Raum über dem komplexen Raum $(X, \mathfrak{A})$. Dann gilt:

1. *Der Quotientenraum $(X^*/L, \mathfrak{C}^*/L)$ ist isomorph zum komplexen Raum $(X/h(G), \mathfrak{A}/h(G))$.*

2. *Ist $(X^*, \mathfrak{C}^*)$ normal, so auch $(X^*/L, \mathfrak{C}^*/L)$.*

Beweis: Auf dem komplexen Raum $(L \times X, \mathfrak{C})$, mit $\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{A}$ operieren die beiden Automorphismengruppen $\tau(G)$ und L. Wegen Gleichung (1) ist

$$\tau(G) \circ L = \{\tau(g) \circ v' : g \in G, v' \in L\}$$

ebenfalls eine Automorphismengruppe von $L \times X$. Bezeichnet man die durch die Gruppen $\tau(G)$, L und $\tau(G) \circ L$ gegebenen Äquivalenzrelationen der Reihe nach mit R, T und S, so gilt: $R \circ T = S$, und Anwendung von Satz 5 ergibt dann die Isomorphie von

$$[((L \times X)/R)/(S/R), (\mathfrak{C}/R)/(S/R)]$$

und

$$[((L \times X)/T)/(S/T), (\mathfrak{C}/T)/(S/T)]\,.$$

Einerseits ist

$$((L \times X)/R, \mathfrak{C}/R) = ((L \times X)/\tau(G), \mathfrak{C}/\tau(G))$$

und die Quotientenrelation S/R auf $(L \times X)/\tau(G)$ wird gerade durch die komplexe Liesche Automorphismengruppe L beschrieben. Andererseits ist die Produktstruktur $\mathfrak{C}$ gerade so definiert, daß

$$((L \times X)/T, \mathfrak{C}/T) = ((L \times X)/L, \mathfrak{C}/L)$$

zu $(X, \mathfrak{A})$ isomorph ist, und der Quotientenrelation S/T auf $(L \times X)/L$ entspricht auf X genau die durch die Gruppe $h(G)$ gegebene Äquivalenzrelation. Damit ist Teil 1 von Satz 13 bewiesen. Teil 2 ergibt sich wie folgt. Aus der Normalität von $(X^*, \mathfrak{C}^*)$ folgt sofort die Normalität von $(L \times X, \mathfrak{C})$, da die

kanonische Projektionsabbildung $\hat{\tau} : (L \times X, \mathfrak{C}) \to (X^*, \mathfrak{C}^*)$ lokal biholomorph ist. Damit ist dann auch $(X, \mathfrak{A})$ normal. Nach Satz 11 ist aber $(X/h(G), \mathfrak{A}/h(G))$ normal, falls $(X, \mathfrak{A})$ normal ist. Der soeben bewiesene erste Teil von Satz 13 besagt gerade, daß mit $(X/h(G), \mathfrak{A}/h(G))$ auch $(X^*/L, \mathfrak{C}^*/L)$ normal ist.

Bevor wir uns dem Beweis von Satz 12 zuwenden, wollen wir einen Abbildungssatz[28]) beweisen, der es uns gestattet, den Beweis von Satz 12 auf Satz 13 zurückzuführen. Es gilt:

Satz 14: $(X, \mathfrak{A})$ *sei ein komplexer Raum, auf dem die komplexe Liesche Automorphismengruppe* $(L, \mathfrak{B})$ *schwach separabel operiert, dann besitzt jeder Punkt* $x \in X$ *eine Umgebung* W_x *mit folgenden Eigenschaften:*

1. W_x *stellt eine bezüglich* L *saturierte offene Menge in* X *dar.*
2. *Es gibt einen Isomorphismus* φ_x *von* W_x *auf einen komplexen* L*-Raum.*
3. *Es gilt stets:* $v \circ \varphi_x = \varphi_x \circ v$, $v \in L$.

Beweis: $\Phi : (L \times X, \mathfrak{C}) \to (X, \mathfrak{A})$ sei die holomorphe Operationsabbildung $\Phi : (v', x') \to v' \circ x'$. Dabei bezeichnet $\mathfrak{C}$ die durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ induzierte Produktstruktur auf $L \times X$. Nach Definition 15 besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U_x mit einer durch x laufenden analytischen Menge $(s_x, \mathfrak{A}(s_x))$, und es gibt eine Umgebung V_ε der Identität ε aus L, so daß $(V_\varepsilon \times s_x, \mathfrak{C}(V_\varepsilon \times s_x))$ durch Φ biholomorph auf $(U_x, \mathfrak{A}(U_x))$ abgebildet wird. W_x sei definiert als die saturierte Hülle von U_x bezüglich L. Mit U_x ist natürlich auch W_x offen in X. $(L \times s_x, \mathfrak{C}(L \times s_x))$ wird durch Φ lokal biholomorph auf $(W_x, \mathfrak{A}(W_x))$ abgebildet, denn jeder Punkt $(v', x') \in L \times s_x$ besitzt eine Umgebung $v' \circ V_\varepsilon \times s_x$, die durch Φ biholomorph auf $v' \circ U_x \subset W_x$ abgebildet wird.

Nach Bedingung (b'), 2. von Definition 15 ist s_x invariant gegenüber der Isotropiegruppe L_x von x. Ordnen wir jedem $g \in L_x$ den Automorphismus $\tau(g) : (v, x) \to (v \circ g^{-1}, g \circ x)$ von $(L \times s_x, \mathfrak{C}(L \times s_x))$ zu, so erhalten wir eine endliche Automorphismengruppe $\tau(L_x)$ von $(L \times s_x, \mathfrak{C}(L \times s_x))$, die zur Bildung des komplexen L-Raumes $(X^*, \mathfrak{C}^*) := [(L \times s_x)/\tau(L_x), \mathfrak{C}(L \times s_x)/\tau(L_x)]$ über dem komplexen Raum $(s_x, \mathfrak{A}(s_x))$ Anlaß gibt. Die Fasern der Abbildung $\Phi : L \times s_x \to W_x$ bestehen genau aus den $\tau(L_x)$-Äquivalenzklassen von $L \times s_x$. Einerseits ist nämlich $v' \circ x' = (v' \circ g^{-1}) \circ (g \circ x')$ für $g \in G_x$ und $(v', x') \in L \times s_x$. Andererseits gilt für (v', x') und (v'', x'') aus $L \times s_x$ mit $v' \circ x' = v'' \circ x''$, daß $x' = (v'^{-1} \circ v'') \circ x''$ ist, wobei $g := v'^{-1} \circ v''$ wegen Bedingung (b'), 2. von Definition 15 zu L_x gehört. Das besagt aber nichts anderes, als daß $(v', x') = (v'' \circ g^{-1}, g \circ x'')$ mit $g \in L_x$. $\Phi : (L \times s_x, \mathfrak{C}(L \times s_x)) \to (W_x, \mathfrak{A}(W_x))$ induziert nach Satz 2 eine eineindeutige holomorphe Abbildung $\Phi^* : (X^*, \mathfrak{C}^*) \to$ $\to (W_x, \mathfrak{A}(W_x))$. Wegen der Offenheit der Abbildung $\Phi : L \times s_x \to W_x$ ist Φ^* topologisch. φ_x sei definiert als Φ^{*-1}. Um die Holomorphie von φ_x nachzuweisen, genügt es die Beschränkung $\tilde{\varphi}_x$ von φ_x auf $v' \circ U_x$, $v' \in L$ zu untersuchen, denn $\{v' \circ U_x : v' \in L\}$ stellt eine offene Überdeckung von W_x dar. $\tilde{\varphi}_x$ ist aber holomorph, da die Beschränkung $\tilde{\Phi}$ von Φ auf $v' \circ V_\varepsilon \times s_x$ biholomorph ist und $\tilde{\varphi}_x = \hat{\tau} \circ \tilde{\Phi}^{-1}$ gilt. Dabei ist $\hat{\tau}$ die kanonische holomorphe Projektion von $(L \times s_x, \mathfrak{C}(L \times s_x))$ auf den komplexen L-Raum $(X^*, \mathfrak{C}^*)$ über

[28]) Vgl. [10], Satz 3, und [11], Satz 4 und Satz 5.

dem komplexen Raum $(s_x, \mathfrak{A}(s_x))$. Jeder Punkt $z \in W_x$ läßt sich in der Form $z = v' \circ x'$ mit $(v', x') \in L \times s_x$ schreiben. Die Abbildung φ_x kann somit durch die Zuordnung $\varphi_x : v' \circ x' \to [v', x']_{\tau(L_x)} \in X^*$ ausgedrückt werden. Zum Nachweis der Identität $v \circ \varphi_x = \varphi_x \circ v$, $v \in L$, rechnet man einfach die beiden Seiten getrennt aus: $(v \circ \varphi_x) \circ (v' \circ x') = v \circ [v', x']_{\tau(L_x)} = [v \circ v', x']_{\tau(L_x)}$, $(\varphi_x \circ v) \circ (v' \circ x') = \varphi_x \circ ((v \circ v') \circ x') = [v \circ v', x']_{\tau(L_x)}$.

Satz 12 läßt sich nun mit Hilfe der Sätze 13 und 14 leicht beweisen.

Beweis zu Satz 12: $\pi : (X, \mathfrak{A}) \to (X/L, \mathfrak{A}/L)$ bezeichne die kanonische Projektion. $\pi(x)$, $x \in X$, sei ein beliebiger Punkt aus X/L und W_x eine saturierte Umgebung von x, die den Bedingungen von Satz 14 genügt. Es gibt also eine biholomorphe Abbildung φ_x von $(W_x, \mathfrak{A}(W_x))$ auf einen komplexen L-Raum $(X^*, \mathfrak{C}^*)$, so daß gilt: $v \circ \varphi_x = \varphi_x \circ v$, $v \in L$. L definiert in W_x eine Äquivalenzrelation R_1 und in X^* eine Äquivalenzrelation R_2. Da die Abbildungen φ_x und φ_x^{-1} mit R_1 und R_2 verträglich sind, so induzieren sie einen Isomorphismus φ_x^* von $(W_x/R_1, \mathfrak{A}(W_x)/R_1)$ auf $(X^*/R_2, \mathfrak{C}^*/R_2)$. Nun ist aber W_x/R_1 nichts anderes als die Umgebung $\pi(W_x)$ des Punktes $\pi(x) \in X/L$, und $\mathfrak{A}(W_x)/R_1$ ist auf natürliche Weise isomorph zu $(\mathfrak{A}/L)(\pi(W_x))$. Nach Satz 13 stellt $(X^*/R_2, \mathfrak{C}^*/R_2)$ einen komplexen Raum dar. Somit ist die Umgebung $(\pi(W_x), (\mathfrak{A}/L)(\pi(W_x)))$ des Punktes $\pi(x)$ zu einem komplexen Raum isomorph. Bedingung (a) von Definition 14 ist äquivalent damit, daß der Quotientenraum X/L hausdorffsch ist. Folglich ist $(X/L, \mathfrak{A}/L)$ ein komplexer Raum. Läßt man die Bedingung (a) fallen, ist $(X/L, \mathfrak{A}/L)$ nur ein pseudo-komplexer Raum.

Da ein komplexer Raum, der den Voraussetzungen von Satz 12 genügt, sich lokal wie ein komplexer L-Raum verhält, so folgt aus dem zweiten Teil von Satz 13 sofort, daß $(X/L, \mathfrak{A}/L)$ normal ist, falls $(X, \mathfrak{A})$ normal ist.

Unter den Voraussetzungen von Satz 12 erhält man für L-invariante analytische Mengen in $(X, \mathfrak{A})$ den folgenden interessanten Projektionssatz:

Satz 15: $(X, \mathfrak{A})$ *sei ein komplexer Raum und L eine komplexe Liesche Automorphismengruppe, die auf* $(X, \mathfrak{A})$ *separabel operiert. Ist N eine bezüglich L invariante analytische Menge in* $(X, \mathfrak{A})$, *dann stellt* $N' := \pi(N)$ *eine analytische Menge in* $(X/L, \mathfrak{A}/L)$ *dar.* π *bezeichnet dabei die kanonische Projektion von* $(X, \mathfrak{A})$ *auf* $(X/L, \mathfrak{A}/L)$. *N ist genau dann niederdimensional in X, wenn N' in X/L niederdimensional ist.*

Beweis: Wegen Satz 14 genügt es Satz 15 für komplexe L-Räume zu beweisen. Sei $(L \times X)/\tau(G)$ ein komplexer L-Raum[29]) über dem komplexen Raum X. $\hat{\tau}$ bezeichne die kanonische Projektionsabbildung von $L \times X$ auf $(L \times X)/\tau(G)$. p sei die kanonische Projektion von $L \times X$ auf die zweite Komponente. L operiert auf $(L \times X)/\tau(G)$ als Automorphismengruppe bezüglich der Operationsabbildung $\psi^* : (v, [v', x']_{\tau(G)}) \to [v \circ v', x']_{\tau(G)}$. Nach Satz 13 ist der Quotient von $(L \times X)/\tau(G)$ nach L isomorph zum komplexen Raum $X/h(G)$. π^* bezeichne die hierdurch definierte holomorphe Projektionsabbildung von $(L \times X)/\tau(G)$ auf $X/h(G)$. π^* läßt sich beschreiben durch die Zuordnung

---

[29]) Es werden die Bezeichnungen von Seite 421 verwendet.

$\pi^* : [v', x']_{\tau(G)} \to [x']_{h(G)}$. $\hat{h}$ sei die kanonische Projektion von X auf $X/h(G)$. Es gilt dann: $\pi^* \circ \hat{\tau} = \hat{h} \circ p$.

Sei nun N eine L-saturierte analytische Menge in $(L \times X)/\tau(G)$, dann ist $\hat{\tau}^{-1}(N)$ eine analytische Menge in $L \times X$. L operiert auf $L \times X$ durch die Operationsvorschrift $\psi : (v, (v', x')) \to (v \circ v', x')$. Man rechnet sich sofort aus, daß $\hat{\tau}^{-1}(N)$ bezüglich L saturiert ist, d. h. $\hat{\tau}^{-1}(N)$ läßt sich schreiben in der Form $L \times M$, wobei M eine analytische Menge in X ist. $\hat{h}(M)$ ist wegen der Eigentlichkeit von $\hat{h}$ eine analytische Menge in $X/h(G)$. Es gilt nun:

$$\pi^*(N) = \pi^* \circ \hat{\tau}(\hat{\tau}^{-1}(N)) = \hat{h} \circ p(\hat{\tau}^{-1}(N)) = \hat{h}(M).$$

Damit ist der erste Teil von Satz 15 bewiesen. Zum Beweis des zweiten Teiles ist zu zeigen, daß genau dann $\dim_x(N) < \dim_x(X)$ für alle $x \in N$, wenn $\dim_{x'}(\hat{h}(M)) < \dim_{x'}(X/h(G))$ für alle $x' \in X/h(G)$. Das ergibt sich aber durch einfaches Ausrechnen.

§ 4. Lokal eigentlich operierende Automorphismengruppen

In diesem Abschnitt werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür abgeleitet, daß eine komplexe Liesche Automorphismengruppe separabel (bzw. schwach separabel) auf einem komplexen Raum $(X, \mathfrak{A})$ operiert, und zwar Bedingungen rein topologischer Natur.

Ist X ein topologischer Raum und G eine topologische Gruppe von topologischen Selbstabbildungen von X, so wollen wir im folgenden stets annehmen, daß G stetig auf X operiert, d. h. daß die Operationsabbildung $\Phi : G \times X \to X$, gegeben durch $\Phi : (g, x) \to g \circ x$, stetig ist.

Definition 16: *X sei ein lokal kompakter topologischer Raum. Eine topologische Gruppe G von topologischen Selbstabbildungen von X operiert lokal eigentlich (bzw. schwach lokal eigentlich) auf X, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Nachbarschaft U_x besitzt, so daß die Operationsabbildung $\Phi : G \times U_x \to X$ (bzw. $\Phi : G \times U_x \to$ $\to \mathscr{H}_G(U_x)$[30]) eigentlich ist.*

G operiert eigentlich, wenn die Abbildung $\Phi : G \times X \to X$ eigentlich ist.

Es gelten die folgenden Sätze:

Satz 16: *X sei ein lokal kompakter topologischer Raum, G eine topologische Gruppe von topologischen Selbstabbildungen von X.*

1. *Operiert G schwach lokal eigentlich auf X, so ist der Quotientenraum X/G ein T_1-Raum.*

2. *Operiert G lokal eigentlich auf X, so ist X/G wieder ein lokal kompakter (und damit auch hausdorffscher) Raum.*

3. *Operiert G eigentlich auf X, so stellt X/G ebenfalls einen lokal kompakten Raum dar und die kanonische Projektionsabbildung $\pi : X \to X/G$ ist eigentlich.*

Beweis: Einen Beweis zu Aussage 1 findet man in [11], Seite 386. Dort wird auch bewiesen, daß der Quotientenraum X/G hausdorffsch ist, falls G lokal eigentlich operiert. Zum Beweis von Aussage 2 bleibt also nur noch zu zeigen, daß jeder Punkt x^* aus X/G eine kompakte Nachbarschaft besitzt.

[30]) $\mathscr{H}_G(U_x)$ bezeichnet die saturierte Hülle von U_x bezüglich G.

π bezeichne die kanonische Projektion von X auf X/G. x sei ein Punkt aus X mit $\pi(x) = x^*$. Da X als lokal kompakt vorausgesetzt ist, besitzt x eine kompakte Nachbarschaft U. $U^* := \pi(U)$ ist dann eine kompakte Nachbarschaft von x^*, da die Projektion π offen ist.

Ad 3 genügt es zu zeigen, daß die saturierte Hülle bezüglich G jeder kompakten Teilmenge K von X wieder kompakt ist[31]). Hierzu beweisen wir zunächst, daß G kompakt ist. Da die Operationsabbildung $\Phi : G \times X \to X$ eigentlich ist, so liegt $\Phi^{-1}(x)$ für jeden Punkt $x \in X$ kompakt in $G \times X$. $\Phi^{-1}(x)$ umfaßt die Punktmenge $\{(g, g^{-1} \circ x) : g \in G\}$. Die kanonische Projektion $\Theta : G \times X \to G$ bildet also $\Phi^{-1}(x)$ auf ganz G ab. G ist somit als stetiges Bild einer kompakten Menge wieder kompakt. Liegt nun K kompakt in X, so ist die saturierte Hülle $\mathscr{H}_G(K) = \Phi(G \times K)$ als stetiges Bild einer kompakten Menge wieder kompakt.

Satz 17: *X sei ein lokal kompakter topologischer Raum, G eine topologische Gruppe von topologischen Selbstabbildungen von X. Die Gruppe G operiert genau dann lokal eigentlich auf X, wenn sie schwach lokal eigentlich auf X operiert und der Bedingung (a) von Definition* 14 *genügt.*

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung folgt sofort aus Satz 16.

Operiert nun umgekehrt G schwach lokal eigentlich auf X und ist Bedingung (a) erfüllt, so besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine Nachbarschaft U_x, so daß die Abbildung $\Phi : G \times U_x \to \mathscr{H}_G(U_x)$ eigentlich ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir U_x als kompakt annehmen. Wir behaupten zunächst, daß $\mathscr{H}_G(U_x)$ abgeschlossen in X ist. Sei nämlich y ein Punkt aus $X - \mathscr{H}_G(U_x)$, so gibt es zu jedem Punkt $x' \in U_x$ Umgebungen $V_{y,x'}$ und $V_{x'}$ von y bzw. x', so daß $V_{y,x'} \cap \mathscr{H}_G(V_{x'})$ leer ist. Unter den $V_{x'}$, $x' \in U_x$, gibt es endlich viele V_{x_μ}, $\mu = 1, \ldots, m$, die ganz U_x überdecken. Setzt man $V_y := \bigcap_{\mu=1}^{m} V_{y,x_\mu}$, so ist $V_y \cap \bigcup_{\mu=1}^{m} \mathscr{H}_G(V_{x_\mu})$ leer, folglich auch $V_y \cap \mathscr{H}_G(U_x) \subset V_y \cap \mathscr{H}_G\left(\bigcup_{\mu=1}^{m} V_{x_\mu}\right)$ $= V_y \cap \bigcup_{\mu=1}^{m} \mathscr{H}_G(V_{x_\mu})$. $X - \mathscr{H}_G(U_x)$ ist somit als offen nachgewiesen. Folglich ist $\mathscr{H}_G(U_x)$ abgeschlossen in X.

Wenn wir nachweisen, daß die Abbildung $\Phi : G \times U_x \to X$ eigentlich ist, so sind wir fertig. Sei nun K eine kompakte Menge in X, dann ist $K^* := K \cap \mathscr{H}_G(U_x)$ als Durchschnitt zweier abgeschlossener Mengen von X wieder abgeschlossen in X, folglich als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge K kompakt. U_x war gerade so gewählt, daß das Urbild bezüglich Φ einer kompakten Teilmenge von $\mathscr{H}_G(U_x)$ kompakt in $G \times U_x$ ist, somit ist $\Phi^{-1}(K) = \Phi^{-1}(K^*)$ kompakt in $G \times U_x$.

Es werden nun einige — auch für das folgende wichtige — Beispiele von Transformationsgruppen, die lokal eigentlich (bzw. schwach lokal eigentlich) operieren, näher betrachtet.

G sei eine lokal kompakte topologische Gruppe und G^* eine abgeschlossene (und somit ebenfalls lokal kompakte) Untergruppe von G. G^* operiert lokal

[31]) Siehe [2], § 10, N° 10, Proposition 17.

eigentlich auf G durch Linkstranslation. Bezeichnet $\Phi : G^* \times G \to G$ die Operationsabbildung $(g_1, g_2) \to g_1 \circ g_2$, so gilt nämlich für jede kompakte Nachbarschaft U_g eines Elementes g von G, daß die durch Beschränkung von Φ gewonnene Abbildung $\tilde{\Phi} : G^* \times U_g \to G$ eigentlich ist. Stellt K eine beliebige kompakte Teilmenge von G dar, so ist zu zeigen, daß $\tilde{\Phi}^{-1}(K)$ kompakt in $G^* \times U_g$ liegt. Mit U_g sind auch U_g^{-1} und $K \circ U_g^{-1}$ kompakt. Da G^* abgeschlossen in G liegt, so ist auch $G_K^* := G^* \cap (K \circ U_g^{-1})$ kompakt. $G_K^* \times U_g$ liegt somit kompakt in $G^* \times U_g$. Man rechnet sofort aus, daß $\tilde{\Phi}^{-1}(K)$ in $G_K^* \times U_g$ enthalten ist. $\tilde{\Phi}^{-1}(K)$ ist somit als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge wieder kompakt.

$((L \times X)/\tau(G), \mathfrak{C}/\tau(G))$ sei ein komplexer L-Raum über dem komplexen Raum $(X, \mathfrak{A})$. L operiert stetig sowohl auf $L \times X$ als auch $(L \times X)/\tau(G)$. Im ersten Fall ist die Operationsabbildung $\Phi : L \times (L \times X) \to L \times X$ durch $\Phi : (v, (v', x')) \to (v \circ v', x')$ gegeben, im zweiten Fall läßt sich die Operationsabbildung $\psi : L \times (L \times X)/\tau(G) \to (L \times X)/\tau(G)$ durch $\psi : (v, [v', x']_{\tau(G)}) \to$ $\to [v \circ v', x']_{\tau(G)}$ beschreiben. Es ist klar, daß L als Transformationsgruppe von $L \times X$ lokal eigentlich operiert. Es gilt sogar, daß für jeden Punkt $(v', x') \in L \times X$ und jede kompakte Nachbarschaft W von (v', x') die durch Beschränkung von Φ gewonnene Abbildung $\tilde{\Phi} : L \times W \to L \times X$ eigentlich ist. Wir zeigen nun, daß L auch als Transformationsgruppe von $(L \times X)/\tau(G)$ lokal eigentlich operiert. $\hat{\tau} : L \times X \to (L \times X)/\tau(G)$ bezeichne die kanonische Projektion. $[v', x']_{\tau(G)}$ sei ein beliebiger Punkt aus $(L \times X)/\tau(G)$ und W eine gegenüber $\tau(G)$ invariante kompakte Nachbarschaft des Punktes $(v', x') \in L \times X$. $\hat{\tau}(W)$ stellt dann eine kompakte Nachbarschaft von $[v', x']_{\tau(G)}$ dar. Wir beweisen, daß die durch Beschränkung von ψ gewonnene Abbildung $\tilde{\psi} : L \times \hat{\tau}(W) \to (L \times X)/\tau(G)$ eigentlich ist. $(1 \times \hat{\tau})$ bezeichne die durch $\hat{\tau}$ induzierte Abbildung $L \times (L \times X) \to L \times (L \times X)/\tau(G)$, die bezüglich der ersten Komponente wie die Identität wirkt. Es gilt $\hat{\tau} \circ \tilde{\Phi} = \tilde{\psi} \circ (1 \times \hat{\tau})$ für alle $(v, (v^*, x^*)) \in L \times W$. Sei nun K eine kompakte Teilmenge von $(L \times X)/\tau(G)$, dann ist $\tilde{\psi}^{-1}(K) = (1 \times \hat{\tau}) \circ \tilde{\Phi}^{-1} \circ \hat{\tau}^{-1}(K)$ kompakt in $L \times \hat{\tau}(W)$, da $\hat{\tau}$ und $\tilde{\Phi}$ eigentliche Abbildungen darstellen.

$(X, \mathfrak{A})$ sei ein komplexer Raum, auf dem die komplexe Liesche Automorphismengruppe L schwach separabel operiert. Dann besitzt nach Satz 14 jeder Punkt $x \in X$ eine saturierte Umgebung $(W_x, \mathfrak{A}(W_x))$, die zu einem komplexen L-Raum isomorph ist. Für jede kompakte Nachbarschaft W von x, die noch in W_x liegt, ist somit die Operationsabbildung $\Phi : L \times W \to \mathscr{H}_L(W) \subset W_x$ eigentlich. L operiert also schwach lokal eigentlich auf X. Nach Satz 17 gilt dann: Operiert L separabel auf $(X, \mathfrak{A})$, so operiert L auch lokal eigentlich auf X. Speziell gilt also: Operiert eine Gruppe G von Automorphismen des komplexen Raumes $(X, \mathfrak{A})$ eigentlich diskontinuierlich auf X, so operiert G auch lokal eigentlich auf X. In gewisser Weise ist auch die Umkehrung hiervon richtig.

Satz 18: $(X, \mathfrak{A})$ *sei ein komplexer Raum und L eine Automorphismengruppe (versehen mit der diskreten Topologie) von* $(X, \mathfrak{A})$. *L operiert genau dann eigentlich diskontinuierlich auf* $(X, \mathfrak{A})$, *wenn L lokal eigentlich auf X operiert.*

Beweis: Es ist nur noch zu zeigen, daß aus dem lokal eigentlichen Operieren von L auf X die Bedingungen (a), (b) und (c) von Definition 14 folgen. Satz 16, Teil 2, besagt gerade, daß Bedingung (a) erfüllt ist. Nach Voraussetzung besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine Nachbarschaft U_x, so daß die Operationsabbildung $\Phi : L \times U_x \to X$ eigentlich ist. U_x kann dabei stets kompakt gewählt werden. $\Phi^{-1}(U_x)$ ist dann kompakt in $L \times U_x$. Θ sei die kanonische Projektion von $L \times X$ auf L. Somit stellt $\Theta \circ \Phi^{-1}(U_x)$ eine kompakte Menge in L dar, d. h. $\Theta \circ \Phi^{-1}(U_x)$ besteht aus endlich vielen Elementen. Da die Isotropiegruppe L_x in $\Theta \circ \Phi^{-1}(U_x)$ enthalten ist, so ist sie stets endlich. Seien nun $g_1, \ldots, g_s$ die Elemente aus $\Theta \circ \Phi^{-1}(U_x)$, die nicht in L_x liegen, dann läßt sich eine Umgebung $\tilde{U}_x \subset U_x$ von x finden, so daß der Durchschnitt von $\bigcup_{\sigma=1}^{s} g_\sigma(\tilde{U}_x)$ und $\tilde{U}_x$ leer ist. $\tilde{U}_x$ kann natürlich stets invariant gegenüber L_x gewählt werden. Die durch Beschränkung von Φ auf $L \times \tilde{U}_x$ gewonnene Abbildung sei mit $\tilde{\Phi}$ bezeichnet. Es gilt: $\Theta \circ \tilde{\Phi}^{-1}(\tilde{U}_x) \subset \Theta \circ \Phi^{-1}(U_x)$. Da aber $g_1, \ldots, g_s$ nicht zu $\Theta \circ \tilde{\Phi}^{-1}(\tilde{U}_x)$ gehören, so ist $\Theta \circ \tilde{\Phi}^{-1}(\tilde{U}_x) = L_x$. Das besagt gerade, daß aus $g \in L$, $x' \in \tilde{U}_x$, $g \circ x' \in \tilde{U}_x$ folgt: $g \in L_x$.

Wir sind nun in der Lage, die zu Beginn dieses Abschnitts angekündigten notwendigen und hinreichenden Bedingungen rein topologischer Natur dafür anzugeben, daß eine komplexe Liesche Automorphismengruppe L separabel (bzw. schwach separabel) auf einem komplexen Raum $(X, \mathfrak{A})$ operiert. Durch Satz 18 wird einem nahegelegt, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 19: $(X, \mathfrak{A})$ *sei ein komplexer Raum und L eine komplexe Liesche Automorphismengruppe von* $(X, \mathfrak{A})$, *für die alle Isotropiegruppen L_x, $x \in X$, endlich sind. L operiert genau dann separabel (bzw. schwach separabel) auf* $(X, \mathfrak{A})$, *wenn L lokal eigentlich (bzw. schwach lokal eigentlich) auf X operiert.*

Der folgende Hilfssatz, dessen Beweis anschließend gegeben wird, läßt uns Satz 19 sehr rasch beweisen.

Hilfssatz 1: $(X, \mathfrak{A})$ *sei ein komplexer Raum und L eine komplexe Liesche Automorphismengruppe von* $(X, \mathfrak{A})$, *für die alle Isotropiegruppen L_x, $x \in X$, endlich sind. Dann besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U_x, und es gibt eine durch x laufende analytische Menge* $(s_x, \mathfrak{A}(s_x))$ *von U_x, so daß gilt:*

(1) *Es gibt eine Umgebung V_ε der identischen Abbildung ε aus L, so daß $V_\varepsilon \times s_x$ durch die Operationsabbildung $\Phi : L \times X \to X$ biholomorph auf U_x abgebildet wird.*

(2) *s_x ist invariant gegenüber der Isotropiegruppe L_x.*

Beweis zu Satz 19: Die Notwendigkeit der Bedingungen hatten wir schon nachgewiesen. Auf Grund von Satz 17 bleibt zu zeigen, daß L schwach separabel auf X operiert, wenn L schwach lokal eigentlich auf X operiert. Hilfssatz 1 nimmt uns dabei die Hauptlast des Beweises ab. Man hat sich nur noch zu überlegen, daß U_x und s_x so gewählt werden können, daß aus $g \in L$, $x' \in s_x$, $g \circ x' \in s_x$ folgt: $g \in L_x$. Zunächst ist klar, daß für eine L_x-invariante offene Teilmenge (bezüglich der Relativtopologie) s_x^* von s_x mit $x \in s_x^*$ gilt, daß $V_\varepsilon \times s_x^*$ durch Φ biholomorph auf eine Umgebung U_x^* von x abgebildet wird.

Das gibt uns die Möglichkeit, die durch Hilfssatz 1 gegebene Umgebung U_x von x mit ihrer analytischen Menge s_x noch zu verkleinern, und zwar so, daß die möglichen Verkleinerungen s_x^* von s_x eine Umgebungsbasis $\mathfrak{S}_x$ des Punktes x auf s_x darstellen. Nehmen wir einmal an, es gäbe keine Umgebung $s_x^* \in \mathfrak{S}_x$, für die aus $g \in L$, $x' \in s_x^*$, $g \circ x' \in s_x^*$ folgt: $g \in L_x$. Dann gibt es gegen x konvergierende Folgen $\{x_\nu : x_\nu \in s_x, \nu = 1, 2, \ldots\}$, $\{x'_\nu : x'_\nu \in s_x, \nu = 1, 2, \ldots\}$ und eine Folge $\{g_\nu : g_\nu \in L\}$, so daß $x'_\nu = g_\nu \circ x_\nu$ aber $g_\nu \notin L_x$ ist. Wir bringen dies zum Widerspruch mit der Voraussetzung, daß L schwach lokal eigentlich auf X operiert. s_x sei so klein gewählt, daß es in einer Nachbarschaft W_x von x liegt, für die $\Phi : L \times W_x \to \mathscr{H}_L(W_x)$ eine eigentliche Abbildung darstellt. Da $K = \{x'_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\} \cup \{x\}$ kompakt in $\mathscr{H}_L(W_x)$ liegt, so muß $\Phi^{-1}(K)$ kompakt in $L \times W_x$ sein. Dann ist aber auch $\Theta \circ \Phi^{-1}(K)$ kompakt in L. Θ stellt dabei die kanonische Projektion von $L \times X$ auf die erste Komponente dar. Wegen $g_\nu \circ x_\nu = x'_\nu$ gehören die Paare (g_ν, x_ν) zu $\Phi^{-1}(K)$, folglich ist $\{g_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\}$ in der kompakten Menge $\Theta \circ \Phi^{-1}(K)$ enthalten. Die g_ν besitzen also einen Häufungspunkt g in L. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die g_ν gegen g konvergieren. Es gilt dann: $x = \lim_{\nu \to \infty} x'_\nu = \lim_{\nu \to \infty} \Phi(g_\nu, x_\nu) = g \circ x$, d. h. g ist ein Element aus L_x. Fast alle Glieder der Folge $\{g_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\}$ liegen in der Umgebung $V_\varepsilon \circ g$ von $g \in L_x$. Greifen wir ein solches g_ν heraus. Es läßt sich in der Form $g_\nu = v_\nu \circ g$ mit $v_\nu \in V_\varepsilon$, aber $v_\nu \neq \varepsilon$, schreiben. Aus $x'_\nu = g_\nu \circ x_\nu$ ergibt sich dann: $x'_\nu = v_\nu \circ x''_\nu$ mit $x''_\nu = g \circ x_\nu \in s_x$. Das steht aber im Widerspruch zur Eineindeutigkeit der Abbildung $\Phi : V_\varepsilon \times s_x \to U_x$.

Beweis von Hilfssatz 1: Nach einem Lemma[32]) von H. Cartan besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine gegenüber der Isotropiegruppe L_x invariante Umgebung U, sowie eine komplexe Karte (U, φ) mit folgenden Eigenschaften: 1. $\varphi(U)$ ist eine in einem Gebiet B eines komplexen Zahlenraumes C^n analytische Menge, wobei $\varphi(x) = O$ ist. 2. Es gibt eine zu L_x isomorphe Gruppe Γ homogener linearer Transformationen des C^n, die B und $\varphi(U)$ invariant lassen und deren Beschränkung Γ' auf $\varphi(U)$ gleich der transformierten Gruppe $\varphi \circ L_x \circ \varphi^{-1}$ ist. Da Γ endlich ist, kann man stets annehmen, daß Γ aus unitären Transformationen besteht.

Es gibt eine Umgebung $W \subset B$ des Nullpunktes im C^n, so daß die analytische Menge $M := \varphi(U) \cap W$ sich darstellt in der Form $M = M_1 \cup \cdots \cup M_s$, wobei die M_σ, $1 \leqq \sigma \leqq s$, in W irreduzible analytische Mengen mit folgenden Eigenschaften sind[33]): 1. Die Darstellung $M = M_1 \cup \cdots \cup M_s$ ist unverkürzbar, d. h. kein M_σ, $1 \leqq \sigma \leqq s$, ist in der Vereinigung der übrigen enthalten. 2. Alle M_σ, $1 \leqq \sigma \leqq s$, enthalten den Nullpunkt und sind dort irreduzibel. Es gilt ferner[34]): 3. Die nichtgewöhnlichen Punkte von M bilden eine analytische Menge N in W. Die Menge $A_\sigma := M_\sigma - (M_\sigma \cap N)$ der auf M_σ liegenden

---

[32]) Siehe [5], Seite 98, Lemma 2.

[33]) Siehe [13], Seite 334, und [14], Seite 266.

[34]) Siehe [7], Seite 256.

gewöhnlichen Punkte von M ist zusammenhängend, während die $A_\sigma, 1 \leqq \sigma \leqq s$, untereinander paarweise disjunkt sind. Die Vereinigung der A_σ ergibt gerade die Menge $A = M - N$ der gewöhnlichen Punkte von M.

$V'_\varepsilon \subset L$ sei eine *zusammenhängende* Umgebung der Identität ε aus L, $U' \subset U$ eine Umgebung von $x \in X$, so daß $\Phi(V'_\varepsilon \times U') \subset \varphi^{-1}(M)$. Die Umgebung V'_ε sei so klein gewählt, daß sie eine komplexe Karte (V'_ε, ψ) in einem komplexen Zahlenraum C^q (q = komplexe Dimension von L) zuläßt. Man kann annehmen, daß $\psi(\varepsilon) = O$ ist. U' kann so gewählt werden, daß $M' := \varphi(U')$ eine in einer Umgebung $W' \subset W$ des Nullpunktes analytische Menge darstellt, die dort die Darstellung $M' = M'_1 \cup \cdots \cup M'_s$ mit $M'_\sigma = M_\sigma \cap W'$ besitzt, wobei die M'_σ in W' irreduzibel sind. Natürlich enthalten die M'_σ alle den Nullpunkt und sind dort irreduzibel. Die Menge A' der gewöhnlichen Punkte von M' zerfällt in die paarweise disjunkten, aber in sich zusammenhängenden Mengen $A'_\sigma := A_\sigma \cap W'$.

Durch die Zuordnung $\mathfrak{F}^* : (y, z) \to \varphi \circ \Phi(\psi^{-1}(y), \varphi^{-1}(z))$, wobei $y = (y_\varkappa)$, $\varkappa = 1, \ldots, q$, und $z = (z_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$, Koordinaten des C^q bzw. C^n bezeichnen, ist eine holomorphe Abbildung von $\psi(V'_\varepsilon) \times M'$ in M definiert. Es ist klar, daß dabei $\psi(V'_\varepsilon) \times A'$ in A abgebildet wird. Da aber die in sich zusammenhängenden Mengen $\psi(V'_\varepsilon) \times A'_\sigma$, $1 \leqq \sigma \leqq s$, paarweise disjunkt sind, so gilt: $\mathfrak{F}^*(\psi(V'_\varepsilon) \times A'_\sigma) \subset A_\sigma$ und damit auch $\mathfrak{F}^*(\psi(V'_\varepsilon) \times M'_\sigma) \subset M_\sigma$.

Die Abbildung $\mathfrak{F}^*$ läßt sich durch ein System auf $\psi(V'_\varepsilon) \times M'$ holomorpher Funktionen $f_1^*(y, z), \ldots, f_n^*(y, z)$ beschreiben. Es gibt folglich eine in $\psi(V'_\varepsilon) \times W'$ enthaltene Polyzylinderumgebung $Y^q \times Z^n = \{(y, z) : |y_\varkappa| < \varepsilon', |z_\nu| < \varepsilon', \varkappa = 1, \ldots, q, \nu = 1, \ldots, n\}$ des Nullpunktes und dort holomorphe Funktionen $f_1(y, z), \ldots, f_n(y, z)$, so daß $f_\nu(y, z) = f_\nu^*(y, z)$, $1 \leqq \nu \leqq n$, für alle $(y, z) \in Y^q \times (Z^n \cap M')$ ist. Die Funktionen $f_1(y, z), \ldots, f_n(y, z)$ definieren eine holomorphe Abbildung $\mathfrak{F}$ von $Y^q \times Z^n$ in den C^n. Wir behaupten nun, daß die Matrix $F(y, z) := \left(\frac{\partial f_\nu(y, z)}{\partial y_\varkappa}\right)$, $\varkappa = 1, \ldots, q$; $\nu = 1, \ldots, n$, für $(y, z) = (O, O)$ den Rang q besitzt.

Durch die Zuordnung $f : y \to (f_1(y, O), \ldots, f_n(y, O))$ wird eine holomorphe Abbildung von Y^q in den C^n definiert. Da $f(y) = \mathfrak{F}^*(y, O)$ für alle $y \in Y^q$, so ist wegen der Endlichkeit der Isotropiegruppen L_x, $x \in X$, der Rang $r_f(y) := \operatorname{codim} f^{-1}(f(y))$ stets gleich q. Sei andererseits $\varrho_f(y)$ der Rang der Matrix $F(y, O)$ und $q' := \operatorname{Max}_{z \in Y^q} (\varrho_f(y))$, so muß in Y^q bis auf eine niederdimensionale analytische Menge S[35]) gelten: $\varrho_f = q'$. Nach einem Hilfssatz von R. REMMERT[36]) ist dann $q' = q$.

Es gibt einen Polyzylinder ${}^*Y^q \times {}^*Y^q$, so daß die Zuordnung $h : (y, y^*) \to \psi(\psi^{-1}(y) \circ \psi^{-1}(y^*))$ eine holomorphe Abbildung von ${}^*Y^q \times {}^*Y^q$ in Y^q ergibt. h läßt sich durch ein System auf ${}^*Y^q \times {}^*Y^q$ holomorpher Funktionen $h_1(y, y^*), \ldots, h_q(y, y^*)$ beschreiben, wobei die Funktionalmatrix $H(y, y^*) := \left(\frac{\partial h_\lambda(y, y^*)}{\partial y^*_\varkappa}\right)$, $\lambda, \varkappa = 1, \ldots, q$, den Rang q hat. Außerdem läßt sich ${}^*Y^q$

[35]) S ist definiert als das simultane Nullstellengebilde aller q'-reihigen Unterdeterminanten von $F(y, 0)$.

[36]) Siehe [13], Seite 348.

so klein wählen, daß $f({}^*Y^q) \subset Z^n$. Dann gilt $f(h(y, y^*)) = \mathfrak{F}(y, f(y^*))$ für alle $(y, y^*) \in {}^*Y^q \times {}^*Y^q$. Daraus folgt:

$$F(y, O) \circ H(y, O) = \left(\frac{\partial f_\nu(y, z)}{\partial z_\mu}\right)_{z=O} \circ F(O, O)$$

oder

$$F(y, O) = \left(\frac{\partial f_\nu(y, z)}{\partial z_\mu}\right)_{z=O} \circ F(O, O) \circ H^{-1}(y, O) .$$

Das bedeutet jedoch: $\varrho_f(y) \leqq \varrho_f(O)$ für alle $y \in {}^*Y^q$. Das kann aber nur sein, wenn $\varrho_f(O) = \operatorname{Rang}(F(O, O))$ gleich q ist.

Durch eine unitäre Koordinatentransformation von Z^n läßt es sich stets erreichen, daß $F(O, O)$ die Darstellung

$$F(O, O) = \begin{pmatrix} \hat{F}(O, O) \\ O \end{pmatrix} \tag{2}$$

besitzt, wobei der Rang der quadratischen Matrix $\hat{F}(y, z) = \left(\frac{\partial f_\nu(y, z)}{\partial y_\varkappa}\right)$, $\varkappa, \nu = 1, \ldots, q$, für $(y, z) = (O, O)$ gleich q ist. Setzt man $\mathfrak{F}'(y, z) = \mathfrak{F}(y, z) + (z - \mathfrak{F}(O, z))$ für $(y, z) \in Y^q \times Z^n$, so gilt wieder $\mathfrak{F}'(y, z) = \mathfrak{F}^*(y, z)$ für alle $(y, z) \in Y^q \times (Z^n \cap M')$. $\mathfrak{F}'(y, z)$ besitzt die folgende Entwicklung nach y:

$$\mathfrak{F}'(y, z) = z + F(O, z) \circ y + \cdots \tag{3}$$

E^{n-q} sei das in Z^n gelegene $(n-q)$-dimensionale Ebenenstück $Z^n \cap \{z : z_1 = \cdots = z_q = 0\}$. Die Beschränkung von $\mathfrak{F}'$ auf $Y^q \times E^{n-q}$ sei mit $\tilde{\mathfrak{F}}$ bezeichnet. Die Funktionalmatrix $\tilde{F}(y, \tilde{z})$ von $\tilde{\mathfrak{F}}(y, \tilde{z})$, $\tilde{z} = (z_\nu)$, $\nu = q + 1, \ldots, n$, hat wegen (3) im Nullpunkt von $Y^q \times E^{n-q}$ die Gestalt:

$$\tilde{F}(O, O) = \begin{pmatrix} \hat{F}(O, O) & O \\ O & E \end{pmatrix}, \tag{4}$$

wobei E eine $(n-q)$-reihige Einheitsmatrix darstellt. Da der Rang von $\hat{F}(O, O)$ gleich q ist, so gilt: $\operatorname{Rang}(\tilde{F}(O, O)) = n$. Sind Y^q und E^{n-q} klein genug gewählt, so wird $Y^q \times E^{n-q}$ durch $\tilde{\mathfrak{F}}$ biholomorph auf ein Gebiet $B' \subset W \subset C^n$ abgebildet. Dabei geht $Y^q \times D$ mit $D := E^{n-q} \cap M'$ über in eine in B' analytische Menge Δ. E^{n-q} stellt eine in B' analytische Menge dar. Die in W irreduzible analytische Menge M_σ, $1 \leqq \sigma \leqq s$, zerfällt in $B' \subset W$ eventuell wieder echt. Es gibt aber eine Umgebung $B'' \subset B'$ des Nullpunktes, so daß $M \cap B''$ in B'' irreduzibel ist und $M \cap B''$ sich als unverkürzbare Vereinigung $(M_1 \cap B'') \cup \cdots \cup (M_s \cap B'')$ darstellt. Bezeichnen wir den Durchschnitt $M'_\sigma \cap E^{n-q}$ mit D_σ, so gilt für alle $\tilde{z} \in D_\sigma : \dim_{\tilde{z}}(D_\sigma) \geqq \dim(M'_\sigma) + \dim(E^{n-q}) - n = \dim(M'_\sigma) - q$ oder $\dim(M'_\sigma) \leqq \dim_{\tilde{z}}(D_\sigma) + q$. Setzt man $d_\sigma := \operatorname*{Min}_{\tilde{z} \in D_\sigma} \dim_{\tilde{z}}(D_\sigma)$, so gilt $\dim(M'_\sigma) \leqq d_\sigma + q$. Da aber $\Delta_\sigma := \tilde{\mathfrak{F}}(Y^q \times D_\sigma)$ eine in $M_\sigma \cap B'$ enthaltene analytische Menge darstellt und ihre Dimension gleich $\dim(D_\sigma) + q$ ist, so muß $\dim(M'_\sigma) \geqq \dim(D_\sigma) + q \geqq d_\sigma + q$ sein. Daraus folgt: $\dim(M'_\sigma) = \dim(D_\sigma) + q = d_\sigma + q$. D_σ ist also reindimensional und folglich auch Δ_σ. Da $\dim(\Delta_\sigma) = \dim(D_\sigma) + q = \dim(M'_\sigma) = \dim(M_\sigma)$ und da $M_\sigma \cap B''$ irreduzibel in B'' liegt, so muß $\Delta_\sigma \cap B''$ gleich $M_\sigma \cap B''$ sein. Wegen $\Delta = \bigcup_{\sigma=1}^{s} \Delta_\sigma$ und

$M = \bigcup_{\sigma=1}^{s} M_\sigma$ stimmt auch $\Delta \cap B''$ mit $M \cap B''$ überein. Wir wählen nun eine Polyzylinderumgebung $\hat{Y}^q \subset Y^q$ des Nullpunktes und eine in E^{n-q} gelegene Umgebung $\tilde{E}^{n-q}$ des Nullpunktes von E^{n-q}, so daß das Bildgebiet $\tilde{B} := \tilde{\mathfrak{F}}(\hat{Y}^q \times \tilde{E}^{n-q})$ in B'' enthalten ist. Mit $\tilde{D} := D \cap \tilde{E}^{n-q}$ ist dann $\tilde{\Delta} := \tilde{\mathfrak{F}}(\hat{Y}^q \times \tilde{D})$ gleich $M \cap \tilde{B}$.

$U_x := \varphi^{-1}(\tilde{\Delta})$ ist somit eine Umgebung von $x \in X$ und $s_x := \varphi^{-1}(\tilde{D})$ stellt eine in U_x analytische Menge dar, so daß gilt: Φ bildet $V_\varepsilon \times s_x$ — mit $V_\varepsilon := \psi^{-1}(\hat{Y}^q)$ — biholomorph auf U_x ab. Damit ist Teil (1) von Hilfssatz 1 nachgewiesen.

Zum Beweis von Teil (2) haben wir nachzuweisen, daß $\tilde{E}^{n-q}$ gegenüber der endlichen unitären Transformationsgruppe Γ invariant bleibt. Γ bestehe aus den Elementen $A^{(\varrho)}$, $\varrho = 1, \ldots, r$. Zerlegen wir $A^{(\varrho)}$ in Teilmatrizen

$$A^{(\varrho)} := \begin{pmatrix} A_{11}^{(\varrho)} & A_{12}^{(\varrho)} \\ A_{21}^{(\varrho)} & A_{22}^{(\varrho)} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

wobei $A_{11}^{(\varrho)}$ und $A_{22}^{(\varrho)}$ quadratische q- bzw. $(n-q)$-reihige Matrizen darstellen, so sind wir fertig, wenn wir nachweisen, daß $A_{12}^{(\varrho)}$ und $A_{21}^{(\varrho)}$ gleich Null sind.

Y_0^q sei eine in $\hat{Y}^q$ enthaltene Polyzylinderumgebung des Nullpunktes, so daß die Zuordnung $k^{(\varrho)}: y \to y^{(\varrho)} = \psi(g_\varrho \circ \psi^{-1}(y) \circ g_\varrho^{-1})$ mit $g_\varrho \in L_x$, $\varrho = 1, \ldots, r$, eine holomorphe Abbildung von Y_0^q in $\hat{Y}^q$ darstellt. Dabei läßt sich $k^{(\varrho)}$ durch ein System auf Y_0^q holomorpher Funktionen $k_1^{(\varrho)}(y), \ldots, k_q^{(\varrho)}(y)$ beschreiben, wobei die Funktionalmatrix

$$K^{(\varrho)}(y) := \left(\frac{\partial k_\lambda^{(\varrho)}(y)}{\partial y_\mu}\right)$$

den Rang q hat. Es gilt:

$$\tilde{\mathfrak{F}}(y^{(\varrho)}, O) = A^{(\varrho)} \circ \tilde{\mathfrak{F}}(y, O), \tag{6}$$

wie man durch Einsetzen verifiziert. Hieraus folgt:

$$\left(\frac{\partial \tilde{\mathfrak{F}}(y^{(\varrho)}, O)}{\partial y_\mu}\right)_{y=O} = \left(\sum_{\lambda=1}^{q} \frac{\partial \tilde{\mathfrak{F}}(y^{(\varrho)}, O)}{\partial y_\lambda^{(\varrho)}} \cdot \frac{\partial k_\lambda^{(\varrho)}(y)}{\partial y_\mu}\right)_{y=O}$$

$$= \left(\frac{\partial \tilde{\mathfrak{F}}(y, O)}{\partial y_\lambda}\right)_{y=O} \circ K^{(\varrho)}(O) = A^{(\varrho)} \circ \left(\frac{\partial \tilde{\mathfrak{F}}(y, O)}{\partial y_\lambda}\right)_{y=O}.$$

Da die Matrix $\left(\frac{\partial \tilde{\mathfrak{F}}(y, O)}{\partial y_\lambda}\right)_{y=O}$ die Gestalt $\begin{pmatrix} \hat{F}(O, O) \\ O \end{pmatrix}$ besitzt, wobei $\hat{F}(O, O)$ eine q-reihige quadratische Matrix vom Rang q ist [s. Gl. (2)], so ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \hat{F}(O, O) \\ O \end{pmatrix} \circ K^{(\varrho)}(O) = \begin{pmatrix} A_{11}^{(\varrho)} & A_{12}^{(\varrho)} \\ A_{21}^{(\varrho)} & A_{22}^{(\varrho)} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \hat{F}(O, O) \\ O \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Aus (7) folgt: $O = A_{21}^{(\varrho)} \circ \hat{F}(O, O)$ oder $A_{21}^{(\varrho)} = O$. Da $A^{(\varrho)}$ unitär ist, so muß auch $A_{12}^{(\varrho)} = O$ sein.

Satz 19 gestattet die interessante Folgerung:

Satz 20: $(X, \mathfrak{A})$ *sei ein komplexer Raum und L eine kompakte komplexe Liesche Automorphismengruppe von* $(X, \mathfrak{A})$, *wobei alle Isotropiegruppen* L_x,

$x \in X$, endlich sind, dann ist der Quotientenraum $(X/L, \mathfrak{A}/L)$ stets ein komplexer Raum. Ist $(X, \mathfrak{A})$ normal, so auch $(X/L, \mathfrak{A}/L)$.

Beweis: Es braucht nur gezeigt zu werden, daß eine kompakte Automorphismengruppe L von $(X, \mathfrak{A})$ stets lokal eigentlich auf X operiert. Man wähle einfach zu jedem Punkt $x \in X$ eine kompakte Nachbarschaft U_x, dann ist die Abbildung $\Phi : L \times U_x \to X$ eigentlich.

§ 5. Folgerungen und Anwendungen

Satz 14, der in gewisser Weise eine Verallgemeinerung des Cartanschen Abbildungssatzes[37]) darstellt, läßt einige Verschärfungen[38]) zu, wenn man sich auf komplexe Liesche Automorphismengruppen beschränkt, die echt operieren.

Definition 17: *Eine Gruppe G von topologischen Selbstabbildungen eines topologischen Raumes X operiert echt auf X, wenn alle Isotropiegruppen G_x, $x \in X$, aus der Identität allein bestehen.*

Definition 18:[39]) *Ein komplexer Raum X mit einer holomorphen Projektionsabbildung $\pi : X \to Y$ von X auf einen komplexen* (bzw. pseudo-komplexen) *Raum Y heißt ein komplex-* (bzw. pseudo-komplex) *analytisches Faserbündel über Y mit F als typischer Faser und L als Strukturgruppe, falls gilt:*

(1) *F ist ein komplexer Raum und L eine komplexe Liesche Automorphismengruppe von F, die auf F effektiv operiert.*

(2) *Y besitzt eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i : i \in I\}$, und es gibt biholomorphe Abbildungen $h_i : \pi^{-1}(U_i) \to F \times U_i$, die für jedes $u \in U_i$ die Faser $\pi^{-1}(u)$ auf $F \times u$ abbilden.*

(3) *Zu jedem Paar $i, j \in I$ mit $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$ gibt es $g_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, L_\omega)$, so daß die Abbildung $h_{ij} := h_i \circ h_j^{-1} : F \times U_{ij} \to F \times U_{ij}$ die Form $(f, u) \to \to (g_{ij}(u) \circ f, u)$ besitzt. Dabei stellt $\Gamma(U_{ij}, L_\omega)$ die Gruppe der holomorphen Abbildungen von U_{ij} in L dar.*

Es gilt die folgende Aussage:

Satz 21: *$(X, \mathfrak{A})$ sei ein komplexer Raum, auf dem die komplexe Liesche Automorphismengruppe L echt und lokal eigentlich* (bzw. schwach lokal eigentlich) *operiert, dann ist $(X, \mathfrak{A})$ holomorph äquivalent zu einem komplex-* (bzw. pseudokomplex-) *analytischen Prinzipalfaserbündel mit L als typischer Faser und Strukturgruppe, und zwar über dem komplexen* (bzw. pseudo-komplexen) *Raum $(X/L, \mathfrak{A}/L)$ als Basis.*

Beweis: Für den komplexen Raum $(X, \mathfrak{A})$ mit der kanonischen holomorphen Projektion π von $(X, \mathfrak{A})$ auf den komplexen (bzw. pseudo-komplexen) Raum $(X/L, \mathfrak{A}/L)$ sind die Bedingungen (1)—(3) von Definition 18 nachzuweisen.

Bedingung (1) ist erfüllt, da L durch Linkstranslation effektiv auf sich operiert.

Ad Bedingung (2) machen wir uns klar, daß unter der Voraussetzung, daß L echt auf X operiert, Aussage 2 von Satz 14 in der folgenden verschärften

[37]) Siehe [1], [3] und [10].

[38]) Siehe auch [11], Satz 9.

[39]) Siehe [9].

Form gilt: Es gibt einen Isomorphismus φ_x von W_x auf das Cartesische Produkt $L \times s_x$, wobei s_x eine durch x laufende analytische Menge in W_x ist. Die Umkehrabbildung $\varphi_x^{-1}: L \times s_x \to W_x$ ist dabei nichts anderes als die Operationsabbildung $\Phi: (v', x') \to v' \circ x'$.

Auf Grund der Aussage 3 von Satz 14 induziert φ_x eine biholomorphe Abbildung ψ_x von $U_x := \pi(W_x)$ auf s_x mit $\psi_x \circ \pi = p_x \circ \varphi_x$, wobei p_x die kanonische Projektion von $L \times s_x$ auf die zweite Komponente bezeichnet. $\{U_x : x \in X\}$ ist eine offene Überdeckung von X/L. Die Zuordnung $\chi_x : (v, x') \to (f, u) := (v^{-1}, \psi_x^{-1}(x'))$ stellt eine biholomorphe Abbildung von $L \times s_x$ auf $L \times U_x$ dar. $h_x := \chi_x \circ \varphi_x$ bildet somit $W_x = \pi^{-1}(U_x)$ biholomorph auf $L \times U_x$ ab. Man rechnet nun sofort aus, daß $h_x \circ \pi^{-1}(u)$ für alle $u \in U_x$ gerade gleich $L \times u$ ist: $h_x \circ \pi^{-1}(u) = (\chi_x \circ \varphi_x) \circ (\varphi_x^{-1} \circ p_x^{-1} \circ \psi_x)(u) = \chi_x \circ p_x^{-1} \circ \psi_x(u) = \chi_x(L \times \psi_x(u)) = L \times u$.

Ad Bedingung (3) zeigen wir, daß die Abbildung $h_{x_1} \circ h_{x_2}^{-1} : L \times U_{x_1 x_2} \to L \times U_{x_1 x_2}$, falls $U_{x_1 x_2} = U_{x_1} \cap U_{x_2} \neq \emptyset$ ist, die folgende Form besitzt:

$$h_{x_1} \circ h_{x_2}^{-1} : (f, u) \to (g_{x_1 x_2}(u) \circ f, u)\,, \tag{8}$$

wobei $g_{x_1 x_2}: U_{x_1 x_2} \to L$ die holomorphe Abbildung $g_{x_1 x_2}: u \to [\Theta \circ \varphi_{x_1} \circ \psi_{x_2}(u)]^{-1}$ darstellt. Θ ist dabei definiert als die Projektion von $L \times s_{x_1}$ auf die erste Komponente. Der Beweis ergibt sich durch einfaches Ausrechnen:

$$\begin{aligned} h_{x_1} \circ h_{x_2}^{-1}(f, u) &= (\chi_{x_1} \circ \varphi_{x_1}) \circ (\varphi_{x_2}^{-1} \circ \chi_{x_2}^{-1})(f, u) = \chi_{x_1} \circ \varphi_{x_1}(f^{-1} \circ \psi_{x_2}(u)) \\ &= \chi_{x_1} \circ f^{-1} \circ (\varphi_{x_1} \circ \psi_{x_2}(u)) \\ &= \chi_{x_1} \circ f^{-1} \circ (\Theta \circ \varphi_{x_1} \circ \psi_{x_2}(u), p_{x_1} \circ \varphi_{x_1} \circ \psi_{x_2}(u)) \\ &= ([\Theta \circ \varphi_{x_1} \circ \psi_{x_2}(u)]^{-1} \circ f, \psi_{x_1}^{-1} \circ p_{x_1} \circ \varphi_{x_1} \circ \psi_{x_2}(u)) \\ &= (g_{x_1 x_2}(u) \circ f, u)\,. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt sich daraus, daß $L \times u$ durch $h_{x_1} \circ h_{x_2}^{-1}$ auf $L \times u$ abgebildet wird.

Satz 12 läßt sich für den Fall, daß $(X, \mathfrak{A})$ eine komplexe Mannigfaltigkeit darstellt und die komplexe Liesche Automorphismengruppe L echt auf X operiert, folgendermaßen verschärfen, wie man dem Beweis von Satz 12 sofort entnimmt.

Satz 24: $(X, \mathfrak{A})$ *sei eine komplexe Mannigfaltigkeit und L eine komplexe Liesche Automorphismengruppe von* $(X, \mathfrak{A})$. *Operiert L echt*[40]) *und lokal eigentlich* (bzw. schwach lokal eigentlich) *auf X, so ist der Quotientenraum* $(X/L, \mathfrak{A}/L)$ *wieder eine komplexe Mannigfaltigkeit* (bzw. pseudo-komplexe Mannigfaltigkeit).

Als Beispiel kann man den Quotientenraum L/H einer komplexen Lieschen Gruppe L nach einer abgeschlossenen komplexen Lieschen Untergruppe H betrachten. H operiert nämlich durch Linkstranslation echt und lokal eigentlich auf L, wie wir gesehen hatten.

---

[40]) Läßt man diese Bedingung fort, so stellt der Quotientenraum $(X/L, \mathfrak{A}/L)$ im allgemeinen nur einen normalen komplexen Raum dar.

$(X, \mathfrak{A})$ sei ein komplexer Raum und L eine komplexe Liesche Automorphismengruppe von $(X, \mathfrak{A})$. (X^*, ϱ) bezeichne die eindeutig bestimmte Normalisierung von $(X, \mathfrak{A})$. Nach Aussage d) von § 1 läßt X^* genau eine normale komplexe Struktur $\mathfrak{A}^*$ zu, so daß die Abbildung $\varrho : (X^*, \mathfrak{A}^*) \to (X, \mathfrak{A})$ holomorph wird.

Jeder Automorphismus $v \in L$ induziert in eindeutiger Weise einen Automorphismus v_* von $(X^*, \mathfrak{A}^*)$, und zwar so, daß gilt:

$$v \circ \varrho = \varrho \circ v^* . \tag{9}$$

Mit (X^*, ϱ) stellt nämlich auch $(X^*, v \circ \varrho)$ eine Normalisierung von $(X, \mathfrak{A})$ dar. Nach Aussage d) von § 1 gibt es dann eine topologische Selbstabbildung v^* von X^*, so daß $v \circ \varrho = \varrho \circ v^*$ ist. Bezeichnet N die Menge der nichtgewöhnlichen Punkte des komplexen Raumes $(X, \mathfrak{A})$, so stellt v^* per definitionem einen Automorphismus von $\big(X^* - \varrho^{-1}(N), \mathfrak{A}^*(X^* - \varrho^{-1}(N))\big)$ dar. Nach Satz 22 und dem Korollar zu Satz 15 von [7] ist v^* dann ein Automorphismus von ganz $(X^*, \mathfrak{A}^*)$. Die Menge aller so gewonnenen Automorphismen v^* von $(X^*, \mathfrak{A}^*)$ bildet eine zu L isomorphe Gruppe L^*, wie man sofort sieht.

L^* läßt sich auf natürliche Weise wieder als komplexe Liesche Gruppe auffassen. Die Operationsabbildung $\Phi^* : L^* \times X^* \to X^*$ ist per definitionem holomorph auf $L^* \times (X^* - \varrho^{-1}(N))$, nach den Sätzen 15 und 22 von [7] dann auch auf ganz $L^* \times X^*$. Folglich stellt L^* eine komplexe Liesche Automorphismengruppe von $(X^*, \mathfrak{A}^*)$ dar.

Wir denken uns die Normalisierung (X^*, ϱ) eines komplexen Raumes $(X, \mathfrak{A})$ stets mit der eindeutig bestimmten normalen komplexen Struktur $\mathfrak{A}^*$ versehen und schreiben hierfür $(X^*, \mathfrak{A}^*)_\varrho$. Es gilt die folgende Aussage:

Satz 25: *Eine komplexe Liesche Automorphismengruppe L eines komplexen Raumes* $(X, \mathfrak{A})$ *operiert genau dann lokal eigentlich* (bzw. schwach lokal eigentlich) *auf X, wenn dasselbe für die zu L kanonisch isomorphe Automorphismengruppe L^* der Normalisierung* $(X^*, \mathfrak{A}^*)_\varrho$ *von* $(X, \mathfrak{A})$ *gilt.*

Beweis: L operiere lokal eigentlich auf X, d. h. zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine Umgebung U, so daß die Operationsabbildung $\Phi : L \times U \to X$ eigentlich ist. Es genügt dann zu zeigen, daß auch die Operationsabbildung $\Phi^* : L \times U^* \to X^*$ mit $U^* := \varrho^{-1}(U)$ eigentlich ist. η bezeichne den kanonischen Isomorphismus von L^* auf L. $\eta \times \varrho$ stellt dann eine eigentliche Abbildung von $L^* \times U^*$ auf $L \times U$ dar. Aus Gleichung (9) folgt:

$$\varrho \circ \Phi^* = \Phi(\eta \times \varrho) . \tag{10}$$

Sei nun K^* kompakt in X^*, dann gilt für $\tilde{K} := \varrho^{-1}(\varrho(K^*))$: $\Phi^{*-1}(\tilde{K}) = (\Phi^{*-1} \circ \varrho^{-1}) \circ \varrho(K^*) = (\varrho \circ \Phi^*)^{-1} \circ (\varrho(K^*))$ ist kompakt in $L^* \times U^*$, da $\varrho(K^*)$ kompakt in X ist und $\varrho \circ \Phi^* = \Phi \circ (\eta \times \varrho)$ eine eigentliche Abbildung von $L^* \times U^*$ in X darstellt. $\Phi^{*-1}(K^*)$ liegt abgeschlossen in $\Phi^{*-1}(\tilde{K})$ und ist somit ebenfalls kompakt.

Operiert umgekehrt L^* lokal eigentlich auf X^*, so gibt es zu jedem Punkt $x^* \in X^*$ eine Umgebung U^*, so daß die Abbildung $\Phi^* : L^* \times U^* \to X^*$ eigentlich ist. Es genügt wieder zu zeigen, daß für $U = \varrho(U^*)$ die Abbildung

$\Phi: L \times U \to X$ eigentlich ist. Es gilt wieder $\varrho \circ \Phi^* = \Phi \circ (\eta \times \varrho)$. Sei nun K eine kompakte Teilmenge von X, dann ist $\Phi^{-1}(K) = (\eta \times \varrho) \circ (\varrho \circ \Phi^*)^{-1}(K)$ kompakt in $L \times U$. $(\varrho \circ \Phi^*)$ stellt nämlich eine eigentliche Abbildung von $L^* \times U^*$ in X dar, so daß $(\varrho \circ \Phi^*)^{-1}(K)$ kompakt in $L^* \times U^*$ und folglich auch $(\eta \times \varrho) \circ (\varrho \circ \Phi^*)^{-1}(K)$ kompakt in $L \times U$ ist.

Für den Fall des schwach lokal eigentlichen Operierens läuft der Beweis ganz analog.

Es gilt ferner:

Satz 26: $(X, \mathfrak{A})$ *sei ein komplexer Raum,* $(X^*, \mathfrak{A}^*)_\varrho$ *seine Normalisierung. Die komplexe Liesche Automorphismengruppe* L *von* $(X, \mathfrak{A})$ *operiere lokal eigentlich auf* X *und alle Isotropiegruppen* L_x, $x \in X$, *seien endlich.* L^* *bezeichne die zu* L *kanonisch isomorphe Automorphismengruppe von* $(X^*, \mathfrak{A}^*)$. *Dann ist* $(X^*/L^*, \mathfrak{A}^*/L^*)$ *ein normaler komplexer Raum, und es gibt eine holomorphe Abbildung* ϱ' *von* $(X^*/L^*, \mathfrak{A}^*/L^*)$ *auf den komplexen Raum* $(X/L, \mathfrak{A}/L)$, *so daß* $\pi \circ \varrho = \varrho' \circ \pi^*$ *gilt* [π und π^* sind dabei die kanonischen Projektionsabbildungen von $(X, \mathfrak{A})$ bzw. $(X^*, \mathfrak{A}^*)$ auf ihre Quotienten nach L bzw. L^*]. $(X^*/L^*, \mathfrak{A}^*/L^*)_{\varrho'}$ *stellt die Normalisierung von* $(X/L, \mathfrak{A}/L)$ *dar.*

Beweis: $(X^*/L^*, \mathfrak{A}^*/L^*)$ ist nach den Sätzen 12, 19 und 25 ein normaler komplexer Raum. Wir zeigen nun, daß die holomorphe Abbildung $\pi \circ \varrho$ von $(X^*, \mathfrak{A}^*)$ auf $(X/L, \mathfrak{A}/L)$ mit der auf $(X^*, \mathfrak{A}^*)$ durch L^* gegebenen Äquivalenzrelation verträglich ist. Sei $x_1^* = v^* \circ x_2^*$, $x_1^*, x_2^* \in X^*$, $v^* \in L^*$, dann ist wegen Gleichung (9): $(\pi \circ \varrho) \circ x_1^* = (\pi \circ \varrho \circ v^*) \circ x_2^* = (\pi \circ v \circ \varrho) \circ x_2^* = (\pi \circ \varrho) \circ x_2^*$. Es gibt also nach Zusatz C zu Satz 12 eine holomorphe Abbildung $\varrho' : (X^*/L^*, \mathfrak{A}^*/L^*) \to (X/L, \mathfrak{A}/L)$, so daß

$$\pi \circ \varrho = \varrho' \circ \pi^* \tag{11}$$

ist. Es bleibt noch nachzuweisen, daß $(X^*/L^*, \mathfrak{A}^*/L^*)_{\varrho'}$ die Normalisierung von $(X/L, \mathfrak{A}/L)$ ist. Wir zeigen zuerst, daß ϱ' nirgends entartet und eigentlich ist.

Unter Benutzung der Gleichungen (9) und (11) rechnet man leicht aus, daß $\varrho'^{-1} \circ [x]_L = \{[x^*]_L : x^* \in \varrho^{-1}(x)\}$ ist. Dabei bezeichnen $[x]_L$ bzw. $[x^*]_{L^*}$ die durch $x \in X$ bzw. $x^* \in X^*$ repräsentierten Äquivalenzklassen aus X/L bzw. X^*/L^*. Aus der Endlichkeit von $\varrho^{-1}(x)$ folgt, daß auch $\varrho'^{-1}[x]_L$ endlich ist. Um die Eigentlichkeit von ϱ' zu zeigen, wähle man irgendeine kompakte Teilmenge $\mathfrak{K}$ in X/L. Da π offen ist, gibt es eine kompakte Teilmenge K in X, so daß $\pi(K) = \mathfrak{K}$. Dann ist $K^* = \varrho^{-1}(K)$ kompakt in X^* und $\mathfrak{K}^* := \pi^*(K^*)$ kompakt in X^*/L^*. Unter Benutzung von (10) und (11) rechnet man dann sofort aus, daß $\varrho'^{-1}(\mathfrak{K}) = \mathfrak{K}^*$ ist.

Bezeichnet $\tilde{N}$ die analytische Menge der nichtgewöhnlichen Punkte von $(X/L, \mathfrak{A}/L)$, so soll nun gezeigt werden, daß $\varrho'^{-1}(\tilde{N})$ den normalen komplexen Raum $(X^*/L^*, \mathfrak{A}^*/L^*)$ nirgends zerlegt. Hierzu haben wir nur nachzuweisen, daß $N' := \varrho'^{-1}(\tilde{N})$ in X^*/L^* niederdimensional ist[41]), d. h. daß $\dim_{x'}(N') < \dim_{x'}(X^*/L^*)$ für alle $x' \in N'$. Da für alle $\tilde{x} \in \tilde{N}$ gilt: $\dim_{\tilde{x}}(\tilde{N}) < \dim_{\tilde{x}}(X/L)$, so ist nach Satz 15 auch für alle $x \in \pi^{-1}(\tilde{N}) : \dim_x(\pi^{-1}(\tilde{N})) < \dim_x(X)$. Ebenso

[41]) Siehe [7], Seite 257, Satz 6.

gilt: $\dim_{x^*}(\varrho^{-1} \circ \pi^{-1}(\tilde{N})) < \dim_{x^*}(X^*)$ für alle $x^* \in \varrho^{-1} \circ \pi^{-1}(\tilde{N})$. Da $\varrho^{-1} \circ \pi^{-1}(\tilde{N}) = \pi^{*-1} \circ \varrho'^{-1}(\tilde{N}) = \pi^{*-1}(N')$ ist, so folgt aus Satz 15: $\dim_{x'}(N') < \dim_{x'}(X^*/L^*)$ für alle $x' \in N'$.

t bezeichne die Beschränkung der Abbildung ϱ' auf $(X^*/L^*) - N'$. Es bleibt nur noch zu beweisen, daß t eine topologische Abbildung von $(X^*/L^*) - N'$ auf $(X/L) - \tilde{N}$ ist. N bezeichne die analytische Menge der nichtgewöhnlichen Punkte von $(X, \mathfrak{A})$. Da N gegenüber L invariant ist und für alle $x \in N$ gilt: $\dim_x(N) < \dim_x(X)$, so ist nach Satz 15 auch $\pi(N)$ eine niederdimensionale analytische Menge in $(X/L, \mathfrak{A}/L)$. Wie eben schließt man, daß $\varrho'^{-1}(\pi(N)) = \pi^* \circ \varrho^{-1}(N)$ eine niederdimensionale analytische Menge in $(X^*/L^*, \mathfrak{A}^*/L^*)$ darstellt. Da die durch Beschränkung von ϱ gewonnene Abbildung $\tilde{\varrho} : X^* - \varrho^{-1}(N) \to X - N$ topologisch ist, so gilt dasselbe für die durch Beschränkung von ϱ' gewonnene Abbildung $\tilde{\varrho}' : (X^*/L^*) - \pi^* \circ \varrho^{-1}(N) \to (X/L) - \pi(N)$. Die Beschränkung von t auf $(X^*/L^*) - (N' \cup \pi^* \circ \varrho^{-1}(N))$ erweist sich somit als topologische Abbildung $t_1 : (X^*/L^*) - (N' \cup \varrho'^{-1} \circ \pi(N)) \to (X/L) - (\tilde{N} \cup \pi(N))$. t_2 bezeichne die Umkehrabbildung von t_1. Da $\pi(N) - (\pi(N) \cap \tilde{N})$ eine niederdimensionale analytische Menge in $(X/L) - \tilde{N}$ darstellt und da sich die identische Selbstabbildung $\varrho' \circ t_2$ von $(X/L) - (\tilde{N} \cup \pi(N))$ trivialerweise zur identischen Selbstabbildung von $(X/L) - \tilde{N}$ fortsetzen läßt, so kann t_2 auf Grund von Satz 2 aus [7] eindeutig zu einer stetigen Abbildung von $(X/L) - \tilde{N}$ in $X^*/L^* - N'$ fortgesetzt werden. Für die mit $\bar{t}$ bezeichnete Fortsetzung von t_2 gilt: $\bar{t} \circ t$ und $t \circ \bar{t}$ sind identische Selbstabbildungen von $(X^*/L^*) - N'$ bzw. $(X/L) - \tilde{N}$, denn die Beschränkungen von $\bar{t} \circ t$ bzw. $t \circ \bar{t}$ auf die dicht in $(X^*/L^*) - N'$ bzw. $(X/L) - \tilde{N}$ liegenden Mengen $(X^*/L^*) - (N' \cup \varrho'^{-1} \circ \pi(N))$ bzw. $(X/L) - (\tilde{N} \cup \pi(N))$ sind identische Selbstabbildungen. Damit ist dann gezeigt, daß t eine topologische Abbildung von $(X^*/L^*) - N'$ auf $(X/L) - \tilde{N}$ darstellt.

Es sollen hier einige Anwendungen der bisher entwickelten Theorie gebracht werden. Aus Satz 6 z. B. folgt sofort:

Satz 27: *L' und L'' seien lokal eigentlich*[42]) *operierende komplexe Liesche Automorphismengruppen von komplexen Räumen $(X', \mathfrak{A}')$ bzw. $(X'', \mathfrak{A}'')$. Die Isotropiegruppen $L'_{x'}$, $x' \in X'$, und $L''_{x''}$, $x'' \in X''$, seien alle endlich. Dann ist $[(X' \times X'')/(L' \times L''), (\mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}'')/(L' \times L'')]$ ein zu $[(X'/L') \times (X''/L''), (\mathfrak{A}'/L') \times \times (\mathfrak{A}''/L'')]$ holomorph äquivalenter komplexer Raum.*

Als Anwendung von Satz 27 beweist man sehr leicht den bekannten Satz, daß die Quotientengruppe einer komplexen Lieschen Gruppe nach einem abgeschlossenen komplexen Lieschen Normalteiler L_0 von L wieder eine komplexe Liesche Gruppe ist. Nach Satz 24 ist nämlich $L^* := L/L_0$ eine komplexe Mannigfaltigkeit. Die Verknüpfungsabbildung $g : L \times L \to L$ mit $g : (v_1, v_2) \to \to v_1 \circ v_2^{-1}$ ist mit der Relation $L_0 \times L_0$ auf $L \times L$ und der Relation L_0 auf L verträglich und induziert nach Korollar 1 eine holomorphe Abbildung von $(L \times L)/(L_0 \times L_0)$ auf L/L_0 und nach Satz 27 dann eine holomorphe Abbildung $g^* : L^* \times L^* \to L^*$ mit $g^* : (v_1^*, v_2^*) \to v_1^* \circ v_2^{*-1}$.

[42]) Hier wie im folgenden lassen sich analoge Aussagen für schwach lokal eigentlich operierende Automorphismengruppen formulieren.

Satz 28: *L sei eine komplexe Liesche Automorphismengruppe des komplexen Raumes $(X, \mathfrak{A})$. L operiere lokal eigentlich auf X und alle Isotropiegruppen L_x, $x \in X$, seien endlich. Dann operiert auch jede abgeschlossene komplexe Liesche Untergruppe L_0 von L lokal eigentlich auf X, d. h. auch $(X/L_0, \mathfrak{A}/L_0)$ ist ein komplexer Raum.*

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Nachbarschaft U_x, so daß die Operationsabbildung $\Phi: L \times U_x \to X$ eigentlich ist. Wir behaupten, daß auch die durch Beschränkung von Φ gewonnene Abbildung $\Phi_0: L_0 \times U_x \to X$ eigentlich ist. Sei K eine kompakte Teilmenge in X, dann ist $\Phi^{-1}(K)$ kompakt in $L \times U_x$. Da $\Phi_0^{-1}(K)$ abgeschlossen in $\Phi^{-1}(K)$ liegt, so ist auch $\Phi_0^{-1}(K)$ kompakt.

Satz 29: *Die Voraussetzungen seien dieselben wie in Satz 28. Außerdem sei noch angenommen, daß L_0 ein Normalteiler von L ist. Dann stellt $L^* = L/L_0$ eine komplexe Liesche Automorphismengruppe des komplexen Raumes $(X/L_0, \mathfrak{A}/L_0)$ dar. L^* operiert lokal eigentlich auf X/L_0, und alle Isotropiegruppen $L^*_{x^*}$, $x^* \in X/L_0$, sind endlich. Die beiden komplexen Räume $(X/L, \mathfrak{A}/L)$ und $[(X/L_0)/L^*, (\mathfrak{A}/L_0)/L^*]$ sind holomorph äquivalent.*

Beweis: $\Phi: L \times X \to X$ bezeichne die holomorphe Operationsabbildung. Φ ist mit den Relationen $L_0 \times L_0$ und L_0 von $L \times X$ bzw. X verträglich, induziert somit eine holomorphe Abbildung von $(L \times X)/(L_0 \times L_0)$ auf X/L_0 und nach Satz 27 dann auch eine holomorphe Operationsabbildung $\Phi^*: L^* \times X/L_0 \to X/L_0$. Nach Voraussetzung gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Nachbarschaft U_x, so daß die Operationsabbildung $\Phi: L \times U_x \to X$ eigentlich ist. $\pi_0: X \to X/L_0$ bezeichne die kanonische Projektionsabbildung. Wir haben zu zeigen, daß die durch Φ induzierte Abbildung $\Phi^*: L^* \times \pi_0(U_x) \to X/L_0$ eigentlich ist. Sei nun K kompakt in X/L_0, dann gibt es wegen der Offenheit der Abbildung π_0 eine kompakte Menge K' in X, so daß $\pi_0(K') = K$ ist. $\Phi^{-1}(K')$ ist nach Voraussetzung kompakt in $L \times U_x$. Folglich liegt auch $(p \times \pi_0) \circ \Phi^{-1}(K')$ kompakt in $L^* \times \pi_0(U_x)$. Dabei ist p die kanonische Projektion von L auf L^*. Man rechnet nun leicht aus, daß $\Phi^{*-1}(K) = (p \times \pi_0) \circ \Phi^{-1}(K')$ gilt, wodurch die Eigentlichkeit von Φ^* bewiesen ist. Um die Endlichkeit der Isotropiegruppen $L^*_{x^*}$, $x^* \in X/L_0$, zu zeigen, braucht man nur auszurechnen, daß $L^*_{x^*} = p \circ L_x$ ist, wobei x ein Punkt aus $\pi_0^{-1}(x^*)$ ist. Die Isomorphie von $(X/L, \mathfrak{A}/L)$ und $((X/L_0)/L^*, (\mathfrak{A}/L_0)/L^*)$ ergibt sich sofort aus Satz 4.

Ist L wieder eine komplexe Liesche Automorphismengruppe eines komplexen Raumes $(X, \mathfrak{A})$, dann stellt die Zusammenhangskomponente L_0 von L, die die Identität von L enthält, stets einen Normalteiler von L dar. Operiert L lokal eigentlich auf X, und sind alle Isotropiegruppen L_x, $x \in X$, endlich, dann operiert $L^* := L/L_0$ auf Grund der Sätze 18, 28 und 29 eigentlich diskontinuierlich auf dem komplexen Raum $(X/L_0, \mathfrak{A}/L_0)$. Der Quotientenraum $(X/L, \mathfrak{A}/L)$ läßt sich dadurch bestimmen, daß man erst den Quotienten von $(X, \mathfrak{A})$ nach einer zusammenhängenden komplexen Lieschen Automorphismengruppe L_0 und dann hiervon den Quotienten nach einer eigentlich diskontinuierlichen Automorphismengruppe L^* bildet.

Unter den Voraussetzungen von Satz 27 kann man zeigen, daß $L' \times L''$ eine komplexe Liesche Automorphismengruppe von $(X' \times X'', \mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}'')$ darstellt, die lokal eigentlich auf $X' \times X''$ operiert und für die alle Isotropiegruppen $(L' \times L'')_{(x', x'')}$, $(x', x'') \in X' \times X''$, endlich sind. Es soll hier nur bewiesen werden, daß $L' \times L''$ lokal eigentlich auf $X' \times X''$ operiert. Zu jedem Punkt $(x', x'') \in X' \times X''$ gibt es Nachbarschaften $U_{x'}$ und $U_{x''}$ von x' bzw. x'', so daß die Operationsabbildungen $\Phi' : L' \times U_{x'} \to X'$ und $\Phi'' : L'' \times U_{x''} \to X''$ eigentlich sind. Es genügt zu zeigen, daß die Operationsabbildung

$$(\Phi' \times \Phi'') : (L' \times L'') \times (U_{x'} \times U_{x''}) \to X' \times X''$$

eigentlich ist. Sei K kompakt in $X' \times X''$, dann gibt es kompakte Mengen K' und K'' von X' bzw. X'', so daß $K \subset K' \times K''$. Da $\Phi'^{-1}(K')$ und $\Phi''^{-1}(K'')$ kompakt in $L' \times U_{x'}$ bzw. $L'' \times U_{x''}$ sind, so ist $(\Phi' \times \Phi'')^{-1}(K' \times K'')$ kompakt in $(L' \times L'') \times (U_{x'} \times U_{x''})$. Somit ist auch $(\Phi' \times \Phi'')^{-1}(K)$ als abgeschlossene Teilmenge von $(\Phi' \times \Phi'')^{-1}(K' \times K'')$ kompakt.

Sei nun L eine komplexe Liesche Gruppe und seien $h_1 : L \to L'$, $h_2 : L \to L''$ Homomorphismen[43]) mit endlichem Kern von L auf L' bzw. L'', dann ist durch die Zuordnung $(h_1 \times h_2) : v \to (h_1(v), h_2(v))$ ein Homomorphismus von L in $L' \times L''$ gegeben, wobei $D := (h_1 \times h_2)(L)$ eine abgeschlossene komplexe Liesche Untergruppe von $L' \times L''$ darstellt. D heißt eine Diagonale von $L' \times L''$. Auf Grund von Satz 28 gilt dann:

Satz 30: $(X_i, \mathfrak{A}_i)$, $i = 1, 2$, *seien komplexe Räume und* $L^{(i)}$ *jeweils lokal eigentlich operierende komplexe Liesche Automorphismengruppen von* $(X_i, \mathfrak{A}_i)$, *für die alle Isotropiegruppen* $L^{(i)}_{x_i}$, $x_i \in X_i$, *endlich sind. Dann operiert jede Diagonale* D *von* $L^{(1)} \times L^{(2)}$ *lokal eigentlich auf* $X_1 \times X_2$, *und alle Isotropiegruppen* $D_{(x_1, x_2)}$, $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ *sind endlich.* $((X_1 \times X_2)/D, (\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)/D)$ *ist wieder ein komplexer Raum.*

Man sieht sofort, wie sich Satz 30 verallgemeinert, wenn man den Index i von 1 bis n laufen läßt.

Literatur

[1] Behnke, H., u. P. Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Ergeb. Math. H. 3 (1934).

[2] Bourbaki, N.: Topologie Général. Chap. I (1951).

[3] Cartan, H.: Les fonctions de deux variables complexes et la représentation analytique. J. Math. pures appl. IX, **10**, 1—114 (1931).

[4] Cartan, H.: Quotient d'une variété analytique par un groupe discret d'automorphismes. Séminaire E. N. S. (1953/54), Exposé XII (hektographiert).

[5] Cartan, H.: Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes. Algebraic Geometry and Topology. A symposium in honor of S. Lefschetz. S. 90—102. Princeton University Press 1957.

[6] Godement, R.: Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Paris: Hermann 1958.

[7] Grauert, H., u. R. Remmert: Komplexe Räume. Math. Ann. **136**, 245—318 (1958).

[8] Grauert, H., u. R. Remmert: Bilder und Urbilder analytischer Garben. Ann. Math. **68**, 393—443 (1958).

[43]) Es sind solche Gruppenhomomorphismen gemeint, die mit den komplexen Strukturen der Lieschen Gruppen L, L' und L'' verträglich sind.

[9] Hirzebruch, F.: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Ergeb. Math. H. 9 (1956).

[10] Holmann, H.: Zur Abbildungstheorie komplexer Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **138**, 428—441 (1959).

[11] Holmann, H.: Quotientenräume komplexer Mannigfaltigkeiten nach komplexen Lieschen Automorphismengruppen. Math. Ann. **139**, 383—402 (1960).

[12] Kelley, J. L.: General Topology. D. van Nostrand Comp. 1955.

[13] Remmert, R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. **133**, 328—370 (1957).

[14] Remmert, R., u. K. Stein: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **126**, 263—306 (1953).

(Eingegangen am 29. Juli 1960)

Tietz, H.
Math. Annalen 142, 441—449 (1961)

Zur Klassifizierung meromorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen

Von

Horst Tietz in Münster (Westf.)

Die Arbeit beschäftigt sich mit der systematischen Untersuchung solcher meromorphen Funktionen, für deren Partialbruchreihen man keine konvergenzerzeugenden Summanden benötigt.

Auf einer Riemannschen Fläche X ist dafür zunächst der Begriff des Hauptteiles, als einer globalen Funktion mit einem Pol, zu präzisieren: das geschieht in § 2, und zwar relativ zu einem fest gewählten Elementardifferential (Analogon zum Cauchykern $\frac{dy}{y-z}$ in der Ebene); diese Auswahl ist willkürlich, da im allgemeinen nicht durch Einbettung von X in eine kompakte Riemannsche Fläche die Möglichkeit zu einer natürlichen Normierung des Elementardifferentials besteht, wie es für $X = \mathbf{C}$ der Fall ist. Die Frage der Konvergenz der Hauptteilsumme, für deren Teilsummen wir in Satz 1 eine grundlegende Integralformel erhalten, erfordert die Angabe der Art, wie X durch Teilgebiete ausgeschöpft wird: obgleich auf gewöhnliche Folgen trivialerweise zurückführbar, dürfte der Begriff der Moore-Smith-Folge hierfür die adäquate Sprechweise liefern. Diesen Dingen ist § 3 gewidmet.

In § 4 wird gezeigt, daß es zu vorgegebenen Polen und Polordnungen stets meromorphe nullstellenfreie Funktionen mit konvergenter Hauptteilsumme gibt. Dieser Satz führt dann (§ 6) zu dem Ergebnis, daß sich jede meromorphe Funktion als Produkt einer ganzen mit einer meromorphen Funktion der betrachteten speziellen Art schreiben läßt. Man kommt also gewissermaßen für die Partialbruchzerlegung statt mit unendlich vielen konvergenzerzeugenden Summanden mit der Abspaltung eines konvergenzerzeugenden Faktors aus. Dies Resultat erweitert das Ergebnis der klassischen Cauchyschen Methode der Partialbruchentwicklung auch im Fall $X = \mathbf{C}$; dieses kann nämlich so ausgesprochen werden, daß man mit Polynomen als konvergenzerzeugenden Faktoren gerade diejenigen meromorphen Funktionen erhält, deren konvergenzerzeugende Summanden Polynome beschränkter Ordnung sind.

Die hier untersuchten meromorphen Funktionen stehen in engem Zusammenhang mit denjenigen in der Nähe des idealen Randes von X holomorphen Differentialen, die dort (also in einem nicht-kompakten Teil von X) eine Cauchysche Integraldarstellung besitzen: dann und nur dann, wenn die Perioden der Produkte einer meromorphen Funktion mit jedem dieser Differentiale bei der betrachteten Ausschöpfung konvergieren, konvergiert die

Hauptteilsumme von f kompakt außerhalb der Pole. Der in § 4 gegebene Beweis dieses Satzes stützt sich auf ein Resultat von H. G. TILLMANN, das wir auf eigene Weise noch einmal herleiten.

§ 1. Algebraische Hilfsmittel

X sei eine nicht-kompakte Riemannsche Fläche. *Mit G bezeichnen wir Normalgebiete* in X, das sind relativ kompakte Gebiete, deren Komplement $X - G$ keine kompakte Komponente enthält[1]).

$\mathcal{M}(X-G)$, $\mathcal{M}'(X-G)$ *seien die linearen Räume der in $X-G$ meromorphen*, $\mathcal{H}(X-G)$, $\mathcal{H}'(X-G)$ *die linearen Räume der dort holomorphen Funktionen bzw. Differentiale.*

Zu je endlich vielen Elementen aus diesen Räumen gibt es eine abgeschlossene Teilmenge A von G, so daß sie in $G - A$ noch holomorph fortsetzbar sind. Insbesondere kann man zu $f \in \mathcal{M}(X-G)$, $d\varphi \in \mathcal{M}'(X-G)$ in G ein zum Rand von G homologes endliches System ω von Wegen finden, derart, daß $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega} f\,d\varphi$ existiert. Da dies Integral nicht von der Wahl von ω abhängt, ist es *eine Bilinearform auf den Räumen $\mathcal{M}(X-G)$ und $\mathcal{M}'(X-G)$, die wir mit $\langle f, d\varphi\rangle_G$ bezeichnen.*

Nach H. BEHNKE und K. STEIN [1] gibt es auf X Elementardifferentiale in zwei Veränderlichen. *Wir wählen ein Elementardifferential fest aus und bezeichnen es mit $dF(y, z)$*; es ist in y ein — bis auf den einfachen Pol z vom Residuum Eins — holomorphes Differential auf X und in z eine — bis auf den einfachen Pol y — auf X holomorphe Funktion.

Wird $dF(y, z)$ bei festem z nur als Differential in y betrachtet, so schreiben wir dafür dF_z. Für jede Wahl von G und z ist $dF_z \in \mathcal{M}'(X-G)$. *Man kann daher $\langle f, dF_z\rangle_G$ für $f \in \mathcal{M}(X-G)$ bilden und erhält damit in Abhängigkeit von z eine Funktion auf X. Diese ist holomorph sowohl in G als auch in $X-G$. Die analytischen Fortsetzungen dieser holomorphen Komponenten bezeichnen wir mit $L_G f$ bzw. $-L_G^* f$.* Es gibt eine abgeschlossene Menge A in G, derart, daß in $G - A$ die drei Funktionen f, $L_G f$, $L_G^* f$ erklärt und holomorph sind. Der Residuensatz ergibt die dort gültige Beziehung

$$f = L_G f + L_G^* f, \tag{1}$$

die folglich auch zwischen den meromorphen Fortsetzungen besteht. Wegen $f \in \mathcal{M}(X-G)$ und $L_G^* f \in \mathcal{H}(X-G)$ ist also auch $L_G f \in \mathcal{M}(X-G)$. L_G und L_G^* sind somit nach (1) komplementäre Endomorphismen von $\mathcal{M}(X-G)$:

$$L_G + L_G^* = I_G \quad \text{(Identität)}. \tag{2}$$

Der in G gültige Cauchysche Integralsatz ergibt ferner

$$L_G^* L_G = 0; \tag{3}$$

---

[1]) In einer anderen gebräuchlichen Terminologie (vgl. [1]) heißt das: „G liegt ganz im Inneren von X" und „G ist relativ-einfach zusammenhängend".

L_G und L_G^* sind also *komplementäre Projektionen* von $\mathcal{M}(X-G)$ auf die Bildunterräume; insbesondere folgt aus (2) und (3) auch

$$L_G L_G^* = 0 \tag{4}$$

und

$$L_G^{*2} = L_G^* . \tag{5}$$

Behauptung 1: *Aus $f \in \mathcal{M}(X-G)$, $g \in \mathcal{M}(X-G)$, $f-g$ holomorph in G, $L_G g = 0$ folgt $g = L_G^* f$.*

Beweis: Es gilt $L_G(g - L_G^* f) = 0$ wegen (4) und

$$L_G^*(g - L_G^* f) = L_G^*(g-f) + L_G^* L_G f = 0$$

wegen (1) und (3). Damit folgt aus (1) die Behauptung.

Analoge Projektionen werden durch dF in den Räumen $\mathcal{M}'(X-G)$ der Differentiale erzeugt: Wir betrachten dazu $dF(y,z)$ bei festem y als Funktion in z und schreiben dafür ${}_y dF$; es gilt ${}_y dF \in \mathcal{M}(X-G)$ für jedes G und jedes y. Folglich kann $\langle {}_y dF, d\varphi\rangle_G$ gebildet werden für jedes $d\varphi \in \mathcal{M}'(X-G)$. Dieser Ausdruck ist in G und in $X-G$ je ein holomorphes Differential, deren analytische Fortsetzungen wir mit $-L'_G\, d\varphi$ bzw. $L'^*_G\, d\varphi$ bezeichnen. L'_G und L'^*_G sind komplementäre Projektionen von $\mathcal{M}'(X-G)$.

Lediglich durch Vertauschung der Integrationen beweist man die

Behauptung 2: *L'^*_G ist bezüglich der betrachteten Bilinearform zu L_G adjungiert, d. h.*

(6) $\langle L_G f, d\varphi\rangle_G = \langle f, L'^*_G\, d\varphi\rangle_G$ *für alle* $f \in \mathcal{M}(X-G)$ *und* $d\varphi \in \mathcal{M}'(X-G)$.

Entsprechendes gilt für L'_G und L_G^*.

§ 2. Partialbrüche meromorpher Funktionen

Wir betrachten nun auf X meromorphe Funktionen; ihre Gesamtheit sei $\mathcal{M}$.

Der Hauptteil, den eine meromorphe Funktion an einer Polstelle z_0 besitzt, ist zunächst nur lokal definiert. Globale Funktionen, die lediglich in z_0 auf die gewünschte Weise singulär werden, sind zahlreich vorhanden: sie unterscheiden sich untereinander um beliebige ganze — d. h. überall holomorphe — Funktionen. Einen Hinweis, wie man eine wohlbestimmte unter ihnen als geeignet auszeichnen kann, gibt der Fall $X = \mathbf{C}$ der schlichten Zahlenebene: Hier sind „Hauptteile bei z_0“ Polynome in $\frac{1}{z-z_0}$; sie sind von allen Funktionen gleichen singulären Verhaltens durch ihr Verschwinden im Unendlichen ausgezeichnet. Diese letztere Eigenschaft, die sich auf nicht-kompaktifizierbare Riemannsche Flächen X nicht unmittelbar überträgt, läßt eine für diesen Zweck brauchbarere Formulierung zu, wenn man als ausgezeichnetes Elementardifferential dF den Cauchykern $\frac{dy}{y-z}$ benutzt: eine in $\mathbf{C}-G$ holomorphe Funktion g verschwindet genau dann im Unendlichen, wenn $L_G g = 0$ gilt.

Da wir im allgemeinen Falle auf X das Elementardifferential dF fest gewählt haben, gelangen wir somit zu folgender

Definition 1: *f sei meromorph und $z_0 \in X$ eine Polstelle von f. Eine meromorphe Funktion g heißt dF-Hauptteil von f in z_0, wenn $f - g$ in z_0 holomorph ist und $L_G g = 0$ gilt für jedes Normalgebiet G, das z_0 enthält.*

Behauptung 3: *Es gibt genau einen dF-Hauptteil von f in z_0. Er wird durch $L^*_{G_0} f$ gegeben, wenn z_0 der einzige Pol von f in G_0 ist.*

Beweis: a) $f - L^*_{G_0} f = L_{G_0} f$ ist in z_0 holomorph. Ferner ist $L^*_{G_0} f$ in $X - \{z_0\}$ holomorph; für jedes G mit $z_0 \in G$ ist also $L_G L^*_{G_0} f = L_{G_0} L^*_{G_0} f = 0$ nach (4). $L^*_{G_0} f$ ist folglich dF-Hauptteil von f in z_0.

b) g sei dF-Hauptteil von f in z_0. Wegen $g = L^*_G g$ für jedes G mit $z_0 \in G$ ist g in $X - \{z_0\}$ holomorph. Ist also z_0 der einzige Pol von f in G_0, so ist $f - g$ in G_0 holomorph; aus Behauptung 1 folgt also $g = L^*_{G_0} f$.

Ebenfalls aus Behauptung 1 ergibt sich nun der

Satz 1: *Die Funktion f sei auf X meromorph. Für ein beliebiges Normalgebiet G ist $L^*_G f$ die Summe der dF-Hauptteile von f in G.*

Bemerkung: Auf dieser Integraldarstellung für die Summe der Hauptteile beruht im Falle $X = \mathbf{C}$ die klassische Cauchysche Methode der Partialbruchzerlegung[2]).

§ 3. Meromorphe Funktionen mit konvergenter Partialbruchzerlegung

Wir untersuchen jetzt das Konvergenzverhalten der Summe der dF-Hauptteile $L^*_G f$ meromorpher Funktionen f in Abhängigkeit von G. Zu diesem Zweck betrachten wir *ausschöpfende Systeme $\mathfrak{S}$ von Normalgebieten G*; ein solches System ist eine durch Inklusion auf natürliche Weise *gerichtete Menge*: mit G_1 und G_2 ist $G_1 \cup G_2$ relativ-kompakt, und da $\mathfrak{S}$ ausschöpft, gibt es folglich ein $G_3 \in \mathfrak{S}$, das G_1 und G_2 umfaßt. Ist $f \in \mathcal{M}$ und $\mathfrak{S}$ gegeben, so stellt also das Funktionensystem $\{L^*_G f\}_{G \in \mathfrak{S}}$ eine Moore-Smith (M. S.)-Folge dar.

Definition 2: *$f \in \mathcal{M}$ mit der Polstellenmenge π_f gehört zur Klasse $\mathcal{K}_{\mathfrak{S}}$, wenn die M-S-Folge $\{L^*_G f\}_{G \in \mathfrak{S}}$ in $X - \pi_f$ kompakt konvergiert; sie gehört zur Teilklasse $\mathcal{K}^0_{\mathfrak{S}}$, wenn f selbst die Grenzfunktion ist.*

Diese Klassen bestehen also, kurz gesagt, aus denjenigen meromorphen Funktionen, für deren Partialbruchdarstellung bei geeigneter Ausschöpfung keine konvergenzerzeugenden Summanden erforderlich sind.

Behauptung 4: *$f \in \mathcal{K}_{\mathfrak{S}}$ gilt genau dann, wenn die M-S-Folge $\{L_G f\}_{G \in \mathfrak{S}}$ in X kompakt konvergiert; die Grenzfunktion ist eine ganze Funktion auf X; $f \in \mathcal{K}^0_{\mathfrak{S}}$ gilt genau dann, wenn diese verschwindet.*

Beweis: Sei $f \in \mathcal{K}_{\mathfrak{S}}$. Mit $\{L^*_G f\}$ ist wegen (1) auch $\{L_G f\}$ in $X - \pi_f$ kompakt konvergent. Die Konvergenz findet sogar in X statt, und zwar kompakt. Sei nämlich K ein kompakter Teil von X, so gibt es ein $G_1 \in \mathfrak{S}$ mit $K \subset G_1$ und folglich eine K umschließende Jordankurve $\omega \subset G_1$, die zu π_f punktfremd ist; da nun $\{L_G f\}$ auf ω gleichmäßig konvergiert und da $L_G f$ für $G \supset G_1$ in G_1 holomorph ist, gilt jede für die $L_G f$ auf ω gültige Abschätzung erst recht auf K. — Die übrigen Aussagen der Behauptung sind evident.

---

[2]) Vgl. etwa [3*], S. 168ff.

Behauptung 5: *Bezeichnen wir den Raum der ganzen Funktionen mit $\mathcal{H}$, so gilt*

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{G}} = \mathcal{K}^0_{\mathfrak{G}} \oplus \mathcal{H}\,.$$

Beweis: Sei $f \in \mathcal{K}_{\mathfrak{G}}$ und $\gamma_f \in \mathcal{H}$ die Grenzfunktion von $\{L_G f\}_{G\in\mathfrak{G}}$. Wegen $L_G(f-\gamma_f) = L_G f - \gamma_f$ konvergiert dann $\{L_G(f-\gamma_f)\}_{G\in\mathfrak{G}}$ gegen Null. Nach Behauptung 4 ist also $f-\gamma_f \in \mathcal{K}^0_{\mathfrak{G}}$, mithin $\mathcal{K}_{\mathfrak{G}} \subset \mathcal{K}^0_{\mathfrak{G}} + \mathcal{H}$. Da ferner für $\gamma \in \mathcal{H}$ stets $L_G\gamma = \gamma$ gilt, ist $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{G}}$ und $\mathcal{K}^0_{\mathfrak{G}} \cap \mathcal{H} = 0$.

Trivial ist die

Behauptung 6: *Wenn wir die Menge* a l l e r *Normalgebiete mit $\mathfrak{G}_0$ bezeichnen, so gilt*

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{G}_0} = \bigcap_{\mathfrak{G}} \mathcal{K}_{\mathfrak{G}}\,, \quad \mathcal{K}^0_{\mathfrak{G}_0} = \bigcap_{\mathfrak{G}} \mathcal{K}^0_{\mathfrak{G}}\,.$$

Die Konvergenz bezüglich $\mathfrak{G}_0$ ist also die stärkste. Für sie gilt die wegen der Äquivalenz von absoluter und unbedingter Konvergenz evidente

Behauptung 7: *f habe die Polstellen z_i mit den dF-Hauptteilen $h_i (i=1,2,\ldots)$. Genau dann, wenn $\sum h_i$ auf $X-\pi_f$ absolut-kompakt konvergiert, gehört f zu $\mathcal{K}_{\mathfrak{G}_0}$.*

§ 4. Funktionen in $\mathcal{K}_{\mathfrak{G}}$ mit vorgegebenen Polen

Satz 2: *Zu beliebigen sich in X nicht häufenden Stellen z_i und natürlichen Zahlen $n_i (i = 1, 2, 3, \ldots)$ gibt es in $\mathcal{K}^0_{\mathfrak{G}_0}$ eine Funktion f, deren Pole die Stellen z_i mit den Ordnungen n_i sind.*

Beweis: U_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, seien paarweise disjunkte normale Parameterumgebungen der z_i und $\mathfrak{G} = \{G_1, G_2, \ldots\}$ eine solche Ausschöpfungsfolge von X, daß $G_{i-1} \subset G_i$ und $U_i \subset G_i - G_{i-1}$ (es sei $G_0 = \theta$) für alle i gilt. Ist τ_i (mit $\tau_i(z_i) = 0$) lokaler Parameter in U_i, so setzen wir zunächst

$$\varphi_i := L^*_{U_i}(\tau_i^{-n_i})\,, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

und

$$\mu_1 := 1,\ \mu_i := \sup\{|\varphi_i(z)|\,,\, z \in G_{i-1}\}\,, \quad i = 2, 3, \ldots\,.$$

Sodann bilden wir

$$h_i := \frac{1}{2^i \mu_i}\,\varphi_i\,, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

und erhalten in der Grenzfunktion f der in $X - \{z_1, z_2, \ldots\}$ kompakt konvergenten Reihe $\sum h_i$ eine meromorphe Funktion mit den geforderten Polordnungen. Da $\sum\limits_{i\neq j} h_i$ in U_j holomorph ist, gilt ferner

$$L^*_{U_j} f = L^*_{U_j} h_j = h_j$$

wegen (5). Nach Behauptung 3 ist also h_j der dF-Hauptteil von f in z_j, und daher gilt $f \in \mathcal{K}_{\mathfrak{G}_0}$ nach Behauptung 7; $f \in \mathcal{K}^0_{\mathfrak{G}_0}$ folgt schließlich aus Definition 2.

Satz 3: *Es gibt in $\mathcal{K}_{\mathfrak{G}_0}$ eine Funktion, die den Forderungen von Satz 2 genügt und außerdem auf X nullstellenfrei ist.*

Den Beweis dieses Satzes stützen wir auf folgenden

Hilfssatz: *γ_1 und γ_2 seien zwei ganze Funktionen auf X ohne gemeinsame Nullstellen; dann gibt es eine solche ganze Funktion γ_3, daß $\gamma_1 + \gamma_2\gamma_3$ nirgends verschwindet.*

Beweis: γ_2 besitze die Nullstellen z_i der Ordnungen n_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Da $\gamma_1(z_i) \neq 0$ ist, sind sämtliche Zweige von $\log \gamma_1$ in z_i holomorph. γ_4 sei eine ganze Funktion, die an jeder Stelle z_i je einen Zweig von $\log \gamma_1$ bis zur Ordnung $n_i - 1$ interpoliert[3]). e^{γ_4} interpoliert dann γ_1 ebenfalls an allen Stellen z_i bis zur Ordnung $n_i - 1$, so daß also

$$\gamma_3 := \frac{e^{\gamma_4} - \gamma_1}{\gamma_2}$$

wieder ganz ist. $\gamma_1 + \gamma_2 \gamma_3 = e^{\gamma_4}$ ist nullstellenfrei.

Hiermit ergibt sich unmittelbar der

Beweis von Satz 3: Sei $f_0 \in \mathscr{K}^0_{\mathfrak{S}_0}$ eine Funktion nach Satz 2. Es gibt nach [2] ganze Funktionen γ_1 und γ_2 ohne gemeinsame Nullstellen, so daß $f_0 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ ist. Zu γ_1 und γ_2 sei γ_3 gemäß dem Hilfssatz gewählt. Dann ist

$$f := f_0 + \gamma_3$$

eine meromorphe Funktion mit den geforderten Polen und ohne Nullstellen, die nach Behauptung 5 zu $\mathscr{K}_{\mathfrak{S}_0}$ gehört.

Es sei erwähnt, daß nicht geklärt werden konnte, ob das Problem von Satz 3 sogar in $\mathscr{K}^0_{\mathfrak{S}_0}$ gelöst werden kann.

§ 5. Duale Kennzeichnung der Konvergenzklassen

Die Konvergenzklassen $\mathscr{K}_{\mathfrak{S}}$ und $\mathscr{K}^0_{\mathfrak{S}}$ stehen in enger Beziehung zu denjenigen Differentialen, die in der Nähe des idealen Randes von X eine Cauchysche Integraldarstellung (bezüglich dF) besitzen: das sind — wegen $L_G'^{*2} = L_G'^{*}$ — die zur Menge

$$\mathscr{B}' := \bigcup_{G \in \mathfrak{S}_0} L_G'^{*} \mathscr{K}'(X - G)$$

gehörenden Differentiale.

Dieser angekündigte Zusammenhang beruht auf einem Dualitätssatz von H. G. TILLMANN[4]); wir formulieren diesen Satz in der für uns brauchbaren speziellen Form und geben für diese einen funktionentheoretischen ad-hoc-Beweis.

Lemma von TILLMANN: *G sei ein Normalgebiet der nicht-kompakten Riemannschen Fläche X. Durchläuft der Index ι die gerichtete Indexmenge J, so konvergiert die M-S-Folge $\{f_\iota\}_{\iota \in J}$ von in G holomorphen Funktionen f_ι genau dann kompakt in G, wenn für jedes $d\varphi \in L_G'^{*} \mathscr{K}'(X - G)$ die M-S-Zahlenfolge $\{\langle f_\iota, d\varphi\rangle_G\}_{\iota \in J}$ konvergiert.*

Beweis: Daß die Bedingung notwendig ist, ist trivial. Daß sie auch hinreicht, ist nicht so einfach zu sehen. Jedenfalls folgt aus ihr zunächst die Konvergenz von $\{f_\iota\}_{\iota \in J}$ in G: für $z \in G$ ist nämlich (Cauchysche Integral-

[3]) Die Existenz einer solchen Funktion folgt aus den von H. FLORACK [2] bewiesenen Existenzsätzen: danach gibt es eine meromorphe Funktion ψ, die bei den z_i solche Pole besitzt, daß (mit dem jeweils ausgewählten Zweig von $\log \gamma_1$) $\psi - \frac{\log \gamma_1}{\gamma_2}$ dort holomorph ist; $\gamma_4 := \gamma_2 \psi$ leistet das Gewünschte.

[4]) Vgl. [4].

formel!)

$$L_G'^* dF_z = dF_z \in L_G'^* \mathscr{H}'(X - G) \tag{7}$$

und daher speziell

$$\{\langle f_\iota, dF_z\rangle_G\}_{\iota\in J} = \{f_\iota(z)\}_{\iota\in J}$$

konvergent. Auf die Kompaktheit der Konvergenz kann nach dem Satz von Vitali geschlossen werden, wenn feststeht, daß die Funktionenfamilie $\{f_\iota\}_{\iota\in J}$ auf jedem kompakten Teil von G gleichmäßig beschränkt ist. Das ist aber tatsächlich der Fall, wie wir jetzt indirekt beweisen wollen.

Es sei also K ein solcher kompakter Teil von G, daß die Menge der Zahlen $m_\iota := \sup\limits_{z\in K} |f_\iota(z)|$ unbeschränkt ist. Zu jedem $\iota \in J$ gibt es ein $z_\iota \in K$, so daß $m_\iota = |f_\iota(z_\iota)|$ ist. An diesen Stellen betrachten wir außerdem die wegen der Konvergenz von $\{f_\iota(z), z \in G\}_{\iota\in J}$ endlichen Zahlen $M_\varkappa := \sup\limits_{\iota\in J} |f_\iota(z_\varkappa)|$; offenbar gilt $m_\iota \leqq M_\iota$ für jedes $\iota \in J$. Es gibt also in J eine solche Folge $\iota_n\,(n = 1,2,3,\ldots)$ von Indizes und eine monotone Folge natürlicher Zahlen k_n, daß

$$3^{(k_n+1)^2} \leqq m_{\iota_n} \leqq M_{\iota_n} \leqq 3^{k_{n+1}^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

gilt; die Folgen m_{ι_n} und M_{ι_n} sind also insbesondere monoton. Wir bilden nun

$$d\psi(y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\, dF(y, z_{\iota_n})\,. \tag{9}$$

Es gibt ein Normalgebiet G_0 mit $K \subset G_0 \subset \overline{G}_0 \subset G$, und $dF(y, z)$ ist — bei irgendeiner Fixierung der lokalen Parameter — für $(y,z) \in K_0 \times K$ beschränkt, wobei K_0 ein beliebiger kompakter Teil von $X - G_0$ ist. Die Reihe in (9) konvergiert daher kompakt in $X - G_0$, folglich: $d\psi \in \mathscr{H}'(X - G)$. Es ist aber sogar $d\psi \in L_G'^* \mathscr{H}'(X - G)$; denn da (9) in $G - G_0$ kompakt konvergiert, ist der Operator $L_G'^*$ mit der Summe vertauschbar: wegen (7) gilt also

$$L_G'^* d\psi = \sum \frac{1}{3^n} L_G'^* dF(y, z_{\iota_n}) = d\psi\,.$$

Mit diesem $d\psi$ bilden wir jetzt die Folge der $\langle f_{\iota_n}, d\psi\rangle_G$: es gilt für jedes $n > 1$ wegen (8) und $k_n \geqq n$ die Abschätzung

$$|\langle f_{\iota_n}, d\psi\rangle_G| = \left|\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{3^l} f_{\iota_n}(z_{\iota_l})\right| \geqq \frac{1}{3^n} m_{\iota_n} - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{3^l} M_{\iota_{n-1}} - \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^l} m_{\iota_n}$$

$$\geqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^n} m_{\iota_n} - M_{\iota_{n-1}}\right) \geqq \frac{1}{2}\left(3^{(k_n+1)^2-n} - 3^{k_n^2}\right) \geqq 3^{n^2}\,.$$

Die Folge ist also unbeschränkt. Das ist aber ein Widerspruch, da sie Teilfolge der als konvergent vorausgesetzten M-S-Folge $\{\langle f_\iota, d\psi\rangle_G\}_{\iota\in J}$ ist.

Dieses Lemma wenden wir jetzt an, um zu testen, ob eine meromorphe Funktion f zu einer Konvergenzklasse $\mathscr{K}_{\mathfrak{S}}$ gehört. Das ist nach Behauptung 4 genau dann der Fall, wenn $\{L_G f\}_{G\in\mathfrak{S}}$ gleichmäßig auf jedem kompakten Teil von X konvergiert. Gleichwertig damit ist offenbar, daß diese M-S-Folge auf jedem Normalgebiet G_0 kompakt konvergiert; dies ist nach dem Tillmann-

schen Lemma äquivalent mit der Konvergenz jeder M-S-Zahlenfolge

$$\{\langle L_G f, d\varphi\rangle_{G_0}\}_{G\in\mathfrak{G}} \quad \text{mit} \quad d\varphi \in L'^*_{G_0}\mathscr{H}'(X-G_0)\,.$$

Für solche $d\varphi$ und $G \supset G_0$ gilt — wegen $L'^{*2}_{G_0} = L'^*_{G_0}$ —

$$d\varphi = L'^*_{G_0}\, d\varphi = L'^*_G d\varphi\,;$$

da ferner $L_G f \cdot d\varphi$ in $G - G_0$ holomorph ist, können wir wegen (6) wie folgt schließen:

$$\langle L_G f, d\varphi\rangle_{G_0} = \langle L_G f, d\varphi\rangle_G = \langle f, L'^*_G\, d\varphi\rangle_G = \langle f, d\varphi\rangle_G\,.$$

Daher stimmt obige M-S-Folge „schließlich" mit

$$\{\langle f, d\varphi\rangle_G\}_{G_0 \subset G\in\mathfrak{G}}$$

überein und hat somit dasselbe Konvergenzverhalten wie diese.

Unser Ergebnis notieren wir als

Satz 4: *$\mathfrak{G}$ sei ein X ausschöpfendes System von Normalgebieten. $\mathscr{K}_{\mathfrak{G}}$ besteht genau aus denjenigen meromorphen Funktionen f, mit denen für jedes $d\varphi \in \mathscr{B}'$ die — für hinreichend große G definierte — M-S-Zahlenfolge $\{\langle f, d\varphi\rangle_G\}_{G\in\mathfrak{G}}$ konvergiert.*

Unmittelbar klar ist nach Behauptung 4 folgendes:

Korollar: *$\mathscr{K}^0_{\mathfrak{G}}$ besteht aus denjenigen $f \in \mathscr{M}$, für welche die in Satz 4 genannten Folgen gegen Null konvergieren.*

Bemerkung: Im Fall der Zahlenebene $X = \mathbf{C}$ läßt sich durch Einbettung in die geschlossene Ebene die Klasse $\mathscr{B}'$ durch das Verhalten ihrer Differentiale im Randpunkt ∞ beschreiben:

setzt man $d\varphi = \psi\, dz$, so gilt mit $dF(y,z) = \dfrac{dy}{y-z}$ offenbar

$$L'^*_G\, d\varphi = (L^*_G\,\psi)\, dz\,.$$

Da aber, wie bereits in § 2 erwähnt, eine Funktion μ sich genau dann in der Form $L^*_G\,\psi$ schreiben läßt, wenn sie in $\mathbf{C} - G$ holomorph ist und im Unendlichen verschwindet, ist

$$\mathscr{B}'(\mathbf{C}) = \mathscr{H}^0_\infty \cdot dz\,,$$

wenn wir mit $\mathscr{H}^0_\infty$ die Menge der im Punkt ∞ holomorphen und dort verschwindenden Funktionskeime bezeichnen. Satz 4 besagt also, daß die Konvergenz der — mit geeigneten sich auf ∞ zusammenziehenden Wegen ω_n — für alle Funktionskeime $\mu \in \mathscr{H}^0_\infty$ gebildeten Zahlenfolgen $\int\limits_{\omega_n} f\,\mu\, dz$ die genaue Bedingung dafür ist, daß *die in der Zahlenebene meromorphe Funktion f eine außerhalb ihrer Pole kompakt konvergente Partialbruchreihe besitzt.*

§ 6. Erzeugung von $\mathscr{M}$ durch $\mathscr{K}_{\mathfrak{G}}$

Für die Frage, wie man durch eine Klasse $\mathscr{K}_{\mathfrak{G}}$ auch größere Mengen meromorpher Funktionen erfassen kann, gibt die Cauchysche Methode der Partialbruchzerlegung[5]) im Falle $X = \mathbf{C}$ einen Hinweis. Durch sie werden diejenigen meromorphen Funktionen f erfaßt, für die $f \cdot z^{-N}$ mit einem geeig-

[5]) Vgl. Fußnote [2]).

neten $N \geqq 0$ zu $\mathscr{K}_{\mathfrak{S}}$ gehört; es handelt sich dabei, wie leicht zu sehen, um diejenigen meromorphen Funktionen, für deren Partialbruchreihe man mit Polynomen vom Grad $< N$ als konvergenzerzeugende Summanden auskommt. Die spezielle Form z^N des Nenners ist dabei unwesentlich; ein beliebiges Polynom P_N vom Grade N leistet dasselbe: mit $\mu \in \mathscr{H}_\infty^0$ ist auch $\frac{z^N}{p_N}\mu \in \mathscr{H}_\infty^0$, und daher ist — man vergleiche hierzu den Schluß von § 5 —

$$\int\limits_{\omega_n} \frac{f}{p_N}\,\mu\, dz = \int\limits_{\omega_n} \frac{f}{z^N}\left(\frac{z^N}{p_N}\,\mu\right) dz$$

für jedes $\mu \in \mathscr{H}_\infty^0$ konvergent, woraus $\frac{f}{p_N} \in \mathscr{K}_{\mathfrak{S}_0}$ folgt. Bedeutet also $\mathscr{P}$ *die Menge aller Polynome*, so kann man das Ergebnis der Cauchyschen Methode so aussprechen:

$\mathscr{P} \cdot \mathscr{K}_{\mathfrak{S}_0}$ ist die Gesamtheit derjenigen in **C** *meromorphen Funktionen, für deren Partialbruchzerlegung nur konvergenzerzeugende Summanden beschränkten Grades benötigt werden.*

Dies Ergebnis legt die Vermutung nahe, daß man jede meromorphe Funktion als Produkt einer ganzen Funktion und einer Funktion aus $\mathscr{K}_{\mathfrak{S}_0}$ erhalten kann. Diese Aussage ist nun in der Tat richtig, und zwar für beliebige nichtkompakte Riemannsche Flächen X; bezeichnen wir wieder mit $\mathscr{H}$ die Menge der ganzen, d. h. überall auf X holomorphen Funktionen, so gilt der

Satz 5: *Es ist* $\mathscr{M} = \mathscr{H} \cdot \mathscr{K}_{\mathfrak{S}_0}$.

Beweis: Nach Satz 3 gibt es zu $f \in \mathscr{M}$ in $\mathscr{K}_{\mathfrak{S}_0}$ eine nirgends verschwindende Funktion g mit denselben Polen und Polordnungen wie f; daher ist $\frac{f}{g}$ ganz.

Literatur

[1] Behnke, H., u. K. Stein: Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. Math. Ann. **120**, 430—461 (1948).

[2] Florack, H.: Reguläre und meromorphe Funktionen auf nicht-geschlossenen Riemannschen Flächen. Schriftenreihe Math. Inst. Münster **1** (1948).

[3*] Kneser, H.: Funktionentheorie. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht (1958).

[4] Tillmann, H. G.: Dualität in der Funktionentheorie auf Riemannschen Flächen. J. reine angew. Math. **195**, 76—101 (1956).

(Eingegangen am 15. Oktober 1960)

MacRobert, T. M.
Math. Annalen 142, 450—452 (1961)

Beta-Function Formulae and Integrals Involving E-Functions

By

T. M. MacRobert in Glasgow

§ 1. Introductory

In § 2 the formulae (1), (2), (3), and (4) for the beta function will be obtained, and in § 3 these will be employed to derive formulae (5), (6), and (7) for the E-functions.

If $R(\alpha) > 0$, $R(\beta) > 0$,

$$(1)\quad \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\{1+ct+d(1-t)\}^{-\alpha-\beta}\,dt = (1+c)^{-\alpha}(1+d)^{-\beta}\,\mathrm{B}(\alpha,\beta)\,,$$

where the constants c and d are such that no one of the expressions $1+c$, $1+d$, $1+ct+d(1-t)$, where $0 \leq t \leq 1$, is zero.

If $R(\alpha) > 0$, $R(\beta) > 0$

$$(2)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha+\beta)\theta(\sin\theta)^{\alpha-1}(\cos\theta)^{\beta-1}\,d\theta = \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\alpha\right)\mathrm{B}(\alpha,\beta)\,.$$

If $R(\alpha) > -1$, $R(\beta) > 0$,

$$(3)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha+\beta)\theta(\sin\theta)^{\alpha-1}(\cos\theta)^{\beta-1}\,d\theta = \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\alpha\right)\mathrm{B}(\alpha,\beta)\,.$$

If $R(\alpha) > 0$, $R(\beta) > 0$,

$$(4)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i(\alpha+\beta)\theta}(\sin\theta)^{\alpha-1}(\cos\theta)^{\beta-1}\,d\theta = e^{i\frac{1}{2}\pi\alpha}\,\mathrm{B}(\alpha,\beta)\,.$$

If $R(\alpha) > 0$, $R(\beta) > 0$,

$$(5)\quad \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{\{1+ct+d(1-t)\}^{\alpha+\beta}}\,E\left[\begin{matrix}p;\alpha_r:\\ q;\varrho_s\end{matrix}\ \frac{\{1+ct+d(1-t)\}^{m+n}}{t^m(1-t)^n}\,z\right]dt = \frac{\sqrt{(2\pi)}\,m^{\alpha-\frac{1}{2}}\,n^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1+c)^{\alpha}(1+d)^{\beta}(m+n)^{\alpha+\beta-\frac{1}{2}}}\times$$
$$\times E\left\{\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\Delta(m;\alpha),\Delta(n;\beta):\\ \varrho_1,\ldots,\varrho_q,\Delta(m+n;\alpha+\beta)\end{matrix}\ \frac{(m+n)^{m+n}(1+c)^m(1+d)^n}{m^m\,n^n}\,z\right\},$$

where m and n are positive integers, c and d satisfy the conditions of formula (1), and $\Delta(m;\alpha)$ denotes the set of parameters

$$\frac{\alpha}{m}, \frac{\alpha+1}{m}, \ldots, \frac{\alpha+m-1}{m}.$$

If $R(\alpha)>0$, $R(\beta)>0$, and if l is a positive integer,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i(\alpha+\beta)\theta}(\sin\theta)^{\alpha-1}(\cos\theta)^{\beta-1} E\{p;\alpha_r:q;\varrho_s:e^{-il\theta}(\operatorname{cosec}\theta)^l z\}\,d\theta \tag{6}$$

$$= e^{i\frac{1}{2}\pi\alpha} l^{-\beta}\,\Gamma(\beta)\,E\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\Delta(l;\alpha):\varrho_1,\ldots,\varrho_q,\Delta(l;\alpha+\beta):e^{-i\frac{1}{2}l\pi}z\}.$$

If $R(\alpha)>0$, $R(\beta)>0$, and if l and m are positive integers,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i(\alpha+\beta)\theta}(\sin\theta)^{\alpha-1}(\cos\theta)^{\beta-1} E\{p;\alpha_r:q;\varrho_s:e^{-i(l+m)\theta}(\operatorname{cosec}\theta)^l(\sec\theta)^m z\}\,d\theta$$

$$= e^{i\frac{1}{2}\pi\alpha}\sqrt{(2\pi)}\,\frac{l^{\alpha-\frac{1}{2}}m^{\beta-\frac{1}{2}}}{(l+m)^{\alpha+\beta-\frac{1}{2}}}\times \tag{7}$$

$$\times E\left\{\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\Delta(l;\alpha),\Delta(m;\beta):\\ \varrho_1,\ldots,\varrho_q,\Delta(l+m;\alpha+\beta)\end{matrix}\; e^{-i\frac{1}{2}\pi l}\,\frac{(l+m)^{l+m}}{l^l m^m}\,z\right\}.$$

§ 2. The Beta-function formulae

In proving (1) assume for the time being that c and d are such that

$$\left|\frac{c-d}{1+d}\right|<1.$$

Then, on expanding the third factor in the integrand in powers of t, the integral becomes

$$(1+d)^{-\alpha-\beta}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta;r)}{r!}\left(\frac{d-c}{1+d}\right)^r\int_0^1 t^{\alpha+r-1}(1-t)^{\beta-1}dt,$$

where

$$(k;r)=k(k+1)\ldots(k+r-1),\ r=1,2,3,\ldots;\ (k;0)=1.$$

On integrating, this becomes

$$(1+d)^{-\alpha-\beta}\,\mathrm{B}(\alpha,\beta)\,F\left(\alpha;;\frac{d-c}{1+d}\right)=(1+d)^{-\alpha-\beta}\,\mathrm{B}(\alpha,\beta)\left(1+\frac{c-d}{1+d}\right)^{-\alpha},$$

from which the result follows.

The temporary restrictions on c and d can now be removed by analytical continuation.

In proving (2) and (3) use is made of the formulae ([1], p. 336)

$$\cos(\nu\theta)=F(\tfrac{1}{2}\nu,-\tfrac{1}{2}\nu;\tfrac{1}{2};\sin^2\theta), \tag{8}$$

$$\sin(\nu\theta)=\nu\sin\theta\,F(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu,\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\nu;\tfrac{3}{2};\sin^2\theta), \tag{9}$$

where $-\frac{1}{2}\pi\le\theta\le\frac{1}{2}\pi$.

For example, on substituting from (8) for $\cos(\alpha+\beta)\theta$ on the left of (2), the integral becomes

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta; r)(-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta; r)}{r!\,(\frac{1}{2}; r)} \frac{1}{2} \mathrm{B}(\tfrac{1}{2}\alpha+r, \tfrac{1}{2}\beta)$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{B}(\tfrac{1}{2}\alpha, \tfrac{1}{2}\beta)\, F(-\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{2}\beta, \tfrac{1}{2}\alpha; \tfrac{1}{2}; 1);$$

and, on applying Gauss' theorem, this becomes

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}\alpha)\,\Gamma(\frac{1}{2}\beta)\,\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta)\,\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha)},$$

which is equal to the expression on the right of (2).

In the same way (3) can be derived by means of (9).

Formula (4) follows immediately from (2) and (3).

§ 3. The E-function integrals

In proving (5) consider first the case $p = q = 0$. Then the integral becomes

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{\{1+ct+d(1-t)\}^{\alpha+\beta}} \exp\left[-\frac{t^m(1-t)^n}{\{1+ct+d(1-t)\}^{m+n}}\frac{1}{z}\right].$$

Here expand in descending powers of z and get

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1/z)^r}{r!} \int_0^1 \frac{t^{\alpha+rm-1}(1-t)^{\beta+rn-1}dt}{\{1+ct+d(1-t)\}^{\alpha+\beta+rm+rn}}$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1/z)^r}{r!} (1+c)^{-\alpha-rm}(1+d)^{-\beta-rn}\, \mathrm{B}(\alpha+rm, \beta+rn)$$
$$= (1+c)^{-\alpha}(1+d)^{-\beta}\,\mathrm{B}(\alpha,\beta)\, F\begin{Bmatrix}\Delta(m;\alpha), \Delta(n;\beta); & \dfrac{-m^m n^n z^{-1}}{(m+n)^{m+n}(1+c)^m(1+d)^n}\\ \Delta(m+n;\alpha+\beta) & \end{Bmatrix}.$$

Next, apply the formula ([1], p. 154)

$$\Gamma(z) = (2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m}\, m^{z-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{z}{m}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{m}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{z+m-1}{m}\right) \tag{10}$$

to $\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\beta)$ and $\Gamma(\alpha+\beta)$, and the expression becomes

$$(1+c)^{-\alpha}(1+d)^{-\beta}\sqrt{(2\pi)}\,\frac{m^{\alpha-\frac{1}{2}}n^{\beta-\frac{1}{2}}}{(m+n)^{\alpha+\beta-\frac{1}{2}}}\times$$
$$\times E\begin{Bmatrix}\Delta(m;\alpha), \Delta(n;\beta): & \dfrac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}(1+c)^m(1+d)^n z\\ \Delta(m+n;\alpha+\beta) & \end{Bmatrix}.$$

Formula (5) can then be obtained by generalising.

The case in which $n = 0$ was given by Saxena ([2], p. 180). It can be proved in the same way.

Formulae (6) and (7) can be derived from (4) in the same manner.

References

[1] MacRobert, T. M.: Functions of a complex variable. 4th edition. London 1954.
[2] Saxena, R. K.: Proc. Glasgow Math. Assoc., 4, 178—185 (1960).

(Received September 16, 1960)

Remmert, R. u. T. van de Ven
Math. Annalen 142, 453—486 (1961)

Über holomorphe Abbildungen projektiv-algebraischer Mannigfaltigkeiten auf komplexe Räume

Von

Reinhold Remmert* und Ton van de Ven in Princeton N. J.

1. In der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen und in der algebraischen Geometrie haben in den letzten Jahren dimensionserniedrigende holomorphe Abbildungen in steigendem Maße an Interesse gewonnen. A. Blanchard (vgl. [5], p. 161 sowie auch [28], p. 167) hat bemerkt, daß jede dimensionserniedrigende holomorphe Abbildung des n-dimensionalen komplex-projektiven Raumes P_n in irgendeinen komplexen Raum[1]) konstant ist. Es ist naheliegend zu fragen, ob dieselbe Aussage auch noch für andere projektiv-algebraische Mannigfaltigkeiten[2]) gilt. Im folgenden wird sich zeigen, daß dies für Grassmannsche Mannigfaltigkeiten sowie für „allgemeine" algebraische Tori und für vollständige Durchschnitte der (komplexen) Dimension $\geqq 3$ zutrifft. Alle diese Mannigfaltigkeiten A_d haben nämlich 1 als $(2d-2)$-te analytische Bettische Zahl $b^a_{2d-2}(A_d)$[3]), und wir zeigen allgemein (vgl. Satz 1.3):

(a) Gestattet die d-dimensionale projektiv-algebraische Mannigfaltigkeit A_d eine holomorphe Abbildung auf einen e-dimensionalen komplexen Raum B_e und gilt $0 < e < d$, so ist $b^a_{2d-2}(A_d) \geqq 2$.

Auch über dimensionserhaltende holomorphe Abbildungen einer projektiv-algebraischen Mannigfaltigkeit A_d mit $b^a_{2d-2}(A_d) = 1$ auf einen komplexen Raum B_d lassen sich Aussagen machen. Wird B_d etwa als algebraisch (im Sinne von A. Weil) vorausgesetzt, so sind alle surjektiven holomorphen Abbildungen $\tau: A_d \to B_d$ Überlagerungsabbildungen (d. h. sämtliche Fasern von τ sind endliche Mengen) und B_d ist sogar projektiv-algebraisch. Macht man dagegen keinerlei einschränkende Annahmen über B_d, so gilt jedenfalls (vgl. Satz 1.13):

(b) Eine surjektive holomorphe Abbildung $\tau: A_d \to B_d$ einer projektiv-algebraischen Mannigfaltigkeit A_d mit $b_1(A_d) = 0$, $b^a_{2d-2}(A_d) = 1$ auf einen

---

* Unterstützt durch Air Force Office of Scientific Research, AF 49 (638)-253, S/A1.

[1]) Unter einem komplexen Raum verstehen wir in dieser Arbeit stets einen zusammenhängenden normalen komplexen Raum (zur Def. vgl. etwa [15]). Die Resultate gelten jedoch z. T. auch für Serresche komplexe Räume, wie man etwa durch Übergang zur Normalisierung einsieht.

[2]) Ein kompakter komplexer Raum heißt projektiv-algebraisch, wenn er biholomorph auf einen abgeschlossenen komplexen Unterraum eines P_n abbildbar ist.

[3]) Zur exakten Definition der analytischen Bettischen Zahlen einer projektiv-algebraischen Mannigfaltigkeit vgl. § 1.2. — Ein unterer Index bedeutet durchweg die komplexe Dimension.

komplexen Raum B_d ist in einer höchstens $(d-2)$-dimensionalen algebraischen Menge entartet[4]).

Für $d = 2$ ist τ also wieder eine Überlagerungsabbildung und B_2 projektiv-algebraisch. Für $d \geqq 3$ ist dies i. a. jedoch nicht mehr der Fall: Im § 4 zeigen wir, daß es eine 3-dimensionale singularitätenfreie Hyperfläche 5. Ordnung H_3^5 im P_4 mit $b_1(H_3^5) = 0$, $b_4^a(H_3^5) = 1$ gibt, die holomorph auf einen komplexen Raum B_3 abgebildet werden kann, derart, daß eine Gerade g in H_3^5 auf einen einzigen Punkt b_0 und der Rest $H_3^5 - g$ biholomorph auf $B_3 - b_0$ abgebildet wird. Der Raum B_3 ist *nicht* algebraisch, alle Divisoren in B_3 enthalten den nichtuniformisierbaren Punkt b_0.

Die Aussage (b) läßt sich noch wie folgt verschärfen (Satz 1.18):

(c) Jede surjektive holomorphe Abbildung $\tau : A_d \to B_d$ einer projektiv-algebraischen Mannigfaltigkeit A_d mit $b_1(A_d) = 0$, $b_2^a(A_d) = b_{2d-2}^a(A_d) = 1$ auf eine komplexe Mannigfaltigkeit B_d ist eine Überlagerungsabbildung, B_d ist projektiv-algebraisch.

2. Eine „allgemeine" singularitätenfreie algebraische Fläche F_2^q im P_3 der Ordnung $q \geqq 4$ hat nach einem klassischen Satz von M. NOETHER (vgl. [2]) 1 als zweite analytische Bettische Zahl. Solche Flächen sind also auf Grund von (a) niemals holomorph auf algebraische Kurven abbildbar. Enthält F_2 jedoch wenigstens eine Gerade (ist also F_2 etwa eine Kubik), so gibt es stets (vgl. den allgemeineren Satz 2.3) holomorphe Abbildungen von F_2 auf den P_1 (mit anderen Worten: es gibt in F_2 nichtkonstante meromorphe Funktionen ohne Unbestimmtheitsstellen). Diese Abbildungen sind indessen i. a. nicht regulär, d. h. ihr Differential ist nicht überall vom Maximalrang 1. Wir zeigen vielmehr (Satz 2.8), daß unter allen singularitätenfreien algebraischen Flächen, die vollständiger Durchschnitt sind, nur die „Quadrik" $P_1 \times P_1$ reguläre holomorphe Abbildungen auf den P_1 gestattet.

Singularitätenfreie algebraische Flächen, die nicht holomorph auf algebraische Kurven abbildbar sind, können sehr wohl eine von 1 verschiedene zweite analytische Bettische Zahl haben. Beispiele hierfür erhält man (vgl. Satz 3.1), wenn man auf einer „allgemeinen" singularitätenfreien algebraischen Fläche 7. Ordnung im P_3 drei verschiedene Punkte vermöge des Hopfschen σ-Prozesses aufbläst.

§ 1. Dimensionserniedrigende Abbildungen algebraischer Mannigfaltigkeiten

1. Wir beginnen mit

Satz 1.1: Es sei A ein projektiv-algebraischer Raum im P_n, es gebe eine holomorphe Abbildung von A auf einen komplexen Raum B, $\dim B \geqq 1$. *Dann gilt*

$$\operatorname{codim} A + \dim B \geqq \dim A .$$

Den Beweis stützen wir auf folgenden auch später noch zu benutzenden

---

[4]) Mit $b_i(A_d)$ bezeichnen wir die i-te Bettische Zahl von A_d. Unter der *Entartungsmenge* einer holomorphen Abbildung verstehen wir die Gesamtheit aller Punkte des Urbildraumes, in denen die Fasern der Abbildung nicht von minimaler Dimension sind; die Entartungsmenge ist stets eine analytische Menge (vgl. [27], Satz 18).

Hilfssatz 1.2: Ist der komplexe Raum B das holomorphe Bild eines projektiv-algebraischen Raumes, so gibt es in B analytische Mengen in allen Dimensionen $0, 1, \ldots, \dim B$.

Beweis: Wir setzen $e := \dim B$ und dürfen $e > 0$ annehmen. Es genügt zu zeigen, daß es $(e-1)$-dimensionale analytische Mengen in B gibt. Nach Voraussetzung gibt es einen projektiv-algebraischen Raum A_d in einem P_n und eine holomorphe Abbildung τ von A_d auf B_e. Dann ist jede Faser von τ mindestens von der Dimension $k := d - e$; es gibt Punkte $b' \in B_e$, so daß $\overset{-1}{\tau}(b')$ rein k-dimensional ist (vgl. [27]). Nach geläufigen Sätzen der algebraischen Geometrie kann man zu jedem solchen Punkt $b' \in B$ einen linearen Teilraum P_{n-k-1} von P_n so bestimmen, daß $\dim(A_d \cap P_{n-k-1}) = d - k - 1$ und $\overset{-1}{\tau}(b') \cap$ $\cap P_{n-k-1}$ isolierte Punkte enthält. Alsdann ist nach einem allgemeinen Satz über holomorphe Abbildungen (vgl. [27], Satz 24) $\tau(A_d \cap P_{n-k-1})$ eine $(d-k-1)$-dimensionale analytische Menge in B. Da $d - k - 1 = e - 1$, ist hiermit der Hilfssatz bewiesen.

Es werde nun Satz 1.1 bewiesen. Wir setzen $d := \dim A$, $e := \dim B$ und betrachten eine holomorphe Abbildung τ von A_d auf B_e. Nach Hilfssatz 1.2 gibt es eine $(e-1)$-dimensionale analytische Menge M in B. Wählen wir einen Punkt $b_0 \in B - M$ (es gilt $B - M \neq \emptyset$), so hat man:

$$\overset{-1}{\tau}(M) \cap \overset{-1}{\tau}(b_0) = \emptyset, \ \dim \overset{-1}{\tau}(b_0) \geqq d - e, \ \dim \overset{-1}{\tau}(M) = d - 1^{6)}.$$

Da im P_n zwei algebraische Mengen der Dimension a_1 bzw. a_2 sich stets schneiden, wenn $a_1 + a_2 \geqq n$, und da $\overset{-1}{\tau}(b_0)$ sowie $\overset{-1}{\tau}(M)$ auch als algebraische Mengen im P_n aufgefaßt werden können, so folgt

$$(d-e) + (d-1) < n, \quad \text{d. h.} \quad (n-d) + e \geqq d.$$

Satz 1.1 findet sich für den Fall, daß A ein holomorphes Faserbündel über einer komplexen Mannigfaltigkeit B ist, bereits in [32], p. 38.

Man kann Satz 1.1 benutzen, um Bedingungen für die Existenz bijektiver holomorpher Abbildungen eines komplexen Raumes A in den P_n zu finden. Ist A etwa ein Produkt von k komplexen Räumen der Dimension $d_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$, so folgt sofort

$$n \geqq \max_{1 \leq j \leq k} \left(2 \sum_{i=1}^{k} d_i - d_j\right).$$

und hieraus

$$n \geqq \left(2 - \frac{1}{k}\right) \dim A.$$

Aus dieser letzten Ungleichung ergibt sich z. B. unmittelbar, daß ein k-fach projektiver Raum A, $k \geqq 2$, dann und nur dann holomorph und bijektiv auf eine Hyperfläche eines P_n abbildbar ist, wenn A die zweidimensionale Quadrik $P_1 \times P_1$ ist.

Satz 1.1 zeigt ferner, daß der P_n selbst überhaupt keine dimensionserniedrigenden nicht konstanten holomorphen Abbildungen zuläßt (Blanchard) und

daß eine beliebige Hyperfläche im P_n dimensionserniedrigend, nicht konstant und holomorph höchstens auf $(n-2)$-dimensionale komplexe Räume abbildbar ist. Wir werden im folgenden jedoch sehen, daß eine dimensionserniedrigende holomorphe Abbildung einer Hyperfläche im P_n in vielen Fällen überhaupt konstant ist, z. B. wenn die Hyperfläche singularitätenfrei und $n \geqq 4$ ist.

2. Es sei A ein kompakter komplexer Raum. Jeder komplexe k-dimensionale irreduzible Teilraum von A repräsentiert in natürlicher Weise ein Element von $H_{2k}(A, Z)$ und daher auch von $H_{2k}(A, R)$[5]. Deswegen repräsentiert auch jeder Zyklus $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i B_k^i$, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ reelle Zahlen und $B_k^1, \ldots, B_k^m$ komplex k-dimensionale irreduzible Unterräume von A sind, ein Element von $H_{2k}(A, R)$. Die Elemente, die in solcher Weise durch „k-dimensionale analytische Zyklen" repräsentiert werden, heißen $2k$-dimensionale analytische Homologieklassen, sie formen einen Unterraum des Vektorraumes $H_{2k}(A, R)$. Wir bezeichnen diesen Unterraum mit $H_{2k}^{(a)}(A, R)$ und nennen $b_{2k}^a(A) := \dim_R H_{2k}^{(a)}(A, R)$ die $2k$-te *analytische* Bettische Zahl von A. Es gilt stets $b_{2k}^a(A) \leqq b_{2k}(A)$, wo $b_s(A) := \dim_R H_s(A, R)$ für die gewöhnliche s-te Bettische Zahl von A steht.

Jede rein k-dimensionale analytische Menge in A wird in kanonischer Weise zu einem k-dimensionalen analytischen Zyklus in A, wenn man all ihre irreduziblen Komponenten mit der Vielfachheit 1 zählt.

Es gilt nun:

Satz 1.3: Es sei A_d, $d > 0$, eine projektiv-algebraische Mannigfaltigkeit mit $b_{2d-2}^a(A_d) = 1$. Dann ist jede dimensionserniedrigende holomorphe Abbildung von A_d auf irgendeinen komplexen Raum B konstant.

Weiter projiziert sich die Entartungsmenge einer jeden holomorphen dimensionserhaltenden Abbildung von A_d auf einen komplexen Raum B in den Durchschnitt aller Divisoren auf B.

Beweis: Zum Beweis der ersten Behauptung genügt es zu zeigen: Ist $\tau : A_d \to B_e$ irgendeine nicht konstante surjektive holomorphe Abbildung, so gilt $e = d$. Wir wählen gemäß Hilfssatz 1.2 eine wegen $e > 0$ nicht leere irreduzible $(e-1)$-dimensionale analytische Menge M in B_e und einen Punkt $b_0 \in B - M$ so, daß $\overset{-1}{\tau}(b_0)$ rein $(d-e)$-dimensional ist. Die Menge $\overset{-1}{\tau}(M)$ ist

[5]) Dies folgt sofort aus den klassischen Ergebnissen über die Triangulierbarkeit projektiv-algebraischer Räume, für die jedoch kein vollständig ausgeführter Beweis publiziert zu sein scheint (vgl. auch [35], p. 545). Nach einer mündlichen Mitteilung von A. BOREL kann jedoch die von ihm in [6] entwickelte Homologietheorie benutzt werden, um jeder analytischen Teilmenge eines kompakten komplexen Raumes X eine (ganzzahlige oder reelle) Homologieklasse zuzuordnen, die mit der vermöge einer Triangulierung definierten Homologieklasse übereinstimmt. Dabei wird, falls X eine algebraische Mannigfaltigkeit ist, der Schnitt zweier Homologieklassen vom Schnittzyklus zweier ihrer Repräsentanten gegeben, falls dieser Zyklus im Sinne der algebraischen Geometrie definiert ist und seine irreduziblen Komponenten mit der richtigen Multiplizität gezählt werden. Für Einzelheiten vgl. eine in Vorbereitung befindliche Arbeit von A. BOREL und A. HAEFLIGER, wo auch die von uns im § 1.5 benutzten Aussagen über den Hopfschen Umkehrungshomomorphismus gerechtfertigt werden.

analytisch in A_d und $(d-1)$-dimensional[6]). Der rein $(d-1)$-dimensionale Bestandteil von $\overset{-1}{\tau}(M)$ definiert einen $(d-1)$-dimensionalen analytischen Zyklus E in A_d, analog gibt $\overset{-1}{\tau}(b_0)$ zu einem $(d-e)$-dimensionalen analytischen Zyklus F in A_d Anlaß. Wir bezeichnen die von E bzw. F bestimmten Elemente von $H_*(A_d, R)$ mit ε bzw. φ. Da $\overset{-1}{\tau}(M) \cap \overset{-1}{\tau}(b_0) = \phi$, so gilt: $\varepsilon \circ \varphi = 0$. Aus unserer Voraussetzung $b^a_{2d-2}(A) = 1$ folgt, da $\varepsilon \neq 0$, daß es eine reelle Zahl r gibt, so daß $r\varepsilon$ durch einen allgemeinen Hyperebenenschnitt H von A_d repräsentiert werden kann. Wäre nun $d - e > 0$, so wäre $H \cap \overset{-1}{\tau}(b_0)$ nicht leer und mithin $(r\varepsilon) \circ \varphi \neq 0$, was der Gleichung $\varepsilon \circ \varphi = 0$ widerspricht. Also muß gelten $e = d$.

Zum Beweis der zweiten Behauptung genügt es, dem obigen folgendes hinzuzufügen: Angenommen, es gäbe einen Punkt $p \in A_d$ in der Entartungsmenge von τ, so daß $\tau(p)$ nicht im Durchschnitt aller Divisoren auf B liegt. Dann würde es einen Divisor D auf B geben, so daß $\overset{-1}{\tau}(D) \cap \overset{-1}{\tau}(\tau(p)) = \phi$. Dies führt jedoch genau wie oben zu einem Widerspruch, da $\overset{-1}{\tau}(\tau(p))$ positive Dimension hat. Satz 1.3 ist damit bewiesen.

Korollar 1.4: Jede dimensionserniedrigende holomorphe Abbildung einer projektiv-algebraischen Mannigfaltigkeit A mit $b_2(A) = 1$ ist konstant.

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 1.3 und dem Poincaréschen Dualitätssatz.

Korollar 1.5: Unter der Bedingung von Satz 1.3 ist jede nicht konstante holomorphe Abbildung von A auf einen algebraischen Raum eine (i. a. verzweigte) Überlagerungsabbildung.

In jedem algebraischen Raum ist der Durchschnitt aller Divisoren nämlich leer, so daß keine Entartung auftreten kann. Solche Abbildungen sind aber Überlagerungsabbildungen.

Bemerkung: Satz 1.3 wird falsch, wenn man die Bedingung, daß A_d projektiv-algebraisch ist, fallen läßt. Ein einfaches Gegenbeispiel liefert die Projektion von $H \times P_1$ auf P_1, wo H eine mit dem Sphärenprodukt $S^1 \times S^3$ homöomorphe Hopfsche Mannigfaltigkeit ist (vgl. [21], p. 168).

3. Wir wenden Satz 1.3 nebst seinen Korollaren jetzt auf einige Typen algebraischer Mannigfaltigkeiten an. Wir beweisen vorbereitend zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1.6: Ist $\tau : X \to Y$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung und ist X projektiv-algebraisch, so ist auch Y projektiv-algebraisch.

Beweis: Es genügt, eine injektive holomorphe Abbildung von Y in einen projektiv-algebraischen Raum zu konstruieren. Ist b die Blätterzahl der Überlagerung, so werde mit Z das b-fache symmetrische Produkt von X mit sich selbst bezeichnet. Z ist ebenfalls ein (normaler) komplexer Raum, und zwar im vorliegenden Fall sogar projektiv-algebraisch (vgl. [8], p. 97 und [30], p. 59).

---

[6]) Wäre nämlich die Dimension von $\overset{-1}{\tau}(M)$ kleiner als $d-1$, so wären alle Fasern der Abbildung $\tau|\overset{-1}{\tau}(M) : \overset{-1}{\tau}(M) \to M$ höchstens $(d-e-1)$-dimensional. Da jede Faser von $\tau|\overset{-1}{\tau}(M)$ auch eine Faser von τ ist, hätte also τ Fasern der Dimension $< d-e$, was unmöglich ist. — Es sei vermerkt, daß $\overset{-1}{\tau}(M)$ nicht rein $(d-1)$-dimensional zu sein braucht.

Ist $y \in Y$ irgendein Punkt, so hat jeder Punkt $x \in \overset{-1}{\tau}(y)$ eine wohldefinierte Multiplizität $o(x)$ (vgl. [15]) und es gilt: $\sum_{x \in \tau^{-1}(y)} o(x) = b$. Wir ordnen nun jedem Punkt $y \in Y$ das ungeordnete b-Tupel $(x_1, \ldots, x_b)$ zu, wobei $x_\beta \in \overset{-1}{\tau}(y)$ genau $o(x_\beta)$-mal vorkommt. Dadurch wird eine stetige Abbildung $\eta : Y \to Z$ definiert, die offensichtlich außerhalb der Verzweigungsmenge von τ in Y holomorph ist. Nach dem Riemannschen Satz über hebbare Singularitäten ist daher η holomorph schlechthin. Da η injektiv abbildet, so folgt die Behauptung.

Hilfssatz 1.7: Ist A eine kompakte homogene komplexe Mannigfaltigkeit, so ist jede holomorphe Abbildung von A auf einen mit A gleichdimensionalen komplexen Raum B eine Überlagerungsabbildung. Ist A projektiv-algebraisch, so auch B.

Den Beweis stützen wir auf folgenden von K. STEIN herrührenden

Faktorisierungssatz (vgl. [31] sowie [28]): *Es sei X eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit und $\tau : X \to Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung von X auf einen komplexen Raum Y. Dann gibt es einen zusammenhängenden, mit Y gleichdimensionalen komplexen Raum Y' sowie holomorphe Abbildungen $\alpha : X \to Y'$, $\beta : Y' \to Y$ mit folgenden Eigenschaften:*

0. Es gilt $\tau = \beta \circ \alpha$

1. α ist eigentlich und einfach, d. h. alle Fasern von α sind zusammenhängend.

2. β ist eine Überlagerungsabbildung.

Der Beweis von Hilfssatz 1.7 verläuft nun wie folgt:
Sei $\tau : A \to B$ die gegebene Abbildung. Nach dem Faktorisierungssatz gibt es einen komplexen Raum B' und eigentliche holomorphe Abbildungen $\alpha : A \to B'$, $\beta : B' \to B$ derart, daß $\tau = \beta \circ \alpha$, wo β eine Überlagerungsabbildung und α einfach vom Range $\dim B'$ ist. Da $\dim A = \dim B'$, so ist α notwendig eine eigentliche Modifikationsabbildung, d. h. es gibt eine mindestens 2-codimensionale analytische Menge N' in B', so daß $\alpha | A - \overset{-1}{\alpha}(N') : A - \overset{-1}{\alpha}(N') \to B' - N'$ biholomorph ist. Da A als homogen vorausgesetzt wurde, so ist $\alpha : A \to B'$ selbst biholomorph ([26], Satz 16 und [14], p. 289). Daraus folgt aber, daß $\tau = \beta \circ \alpha$ eine Überlagerungsabbildung ist. Aus Hilfssatz 1.6 folgt, daß mit A auch B projektiv-algebraisch ist.

Es folgt nun

Satz 1.8: Eine nicht konstante holomorphe Abbildung einer Grassmannschen Mannigfaltigkeit bzw. einer singularitätenfreien Quadrik Q_d, $d \geqq 3$, auf irgendeinen komplexen Raum ist stets eine Überlagerungsabbildung auf einen projektiv-algebraischen Raum. Ist der Abbildungsgrad von 1 *verschieden, so ist die Abbildung stets verzweigt.*

Beweis: Da die zweite Bettische Zahl der im Satze genannten Mannigfaltigkeiten gleich 1 ist (vgl. [11], p. 418 u. 424), so folgt aus Korollar 1.4, daß diese Mannigfaltigkeiten keine nicht konstanten dimensionserniedrigenden holomorphen Abbildungen zulassen. Aus Hilfssatz 1.7 folgt dann weiter, da die in Rede stehenden Mannigfaltigkeiten sämtlich homogen sind, daß als dimensionserhaltende holomorphe Abbildungen nur Überlagerungsabbildungen auf projektiv-algebraische Räume auftreten können. Die letzte Behauptung des Satzes

kann man für eine Grassmannsche Mannigfaltigkeit z. B. wie folgt einsehen. Sei etwa $G_{n,m}$ die Mannigfaltigkeit der m-dimensionalen linearen Teilräume P_m von P_n. Jeder Holomorphismus von P_n bildet die m-dimensionalen linearen Teilräume auf ebensolche ab und induziert somit in kanonischer Weise einen Holomorphismus von $G_{n,m}$; weiter definiert, falls $n = 2m + 1$, jede Dualität des P_n eine Abbildung der m-dimensionalen linearen Teilräume des P_n auf sich und somit einen Holomorphismus von $G_{n,m}$[6a]). Es ist bekannt (vgl. [9], p. 64 ff.), daß umgekehrt jeder Holomorphismus von $G_{n,m}$ in der angegebenen Weise von einer Kollineation bzw. Dualität des P_n induziert wird. Nun läßt jede Kollineation des P_n eine Hyperebene P_{n-1} fest. In diesem P_{n-1} bleibt ein P_{n-2} fest, usw. Durch Induktion folgt, daß wenigstens ein P_m in sich transformiert wird; daher haben alle von Kollineationen induzierten Holomorphismen von $G_{n,m}$ wenigstens einen Fixpunkt. Gilt $n = 2m + 1$, so zeigen wir, daß auch jede involutorische Dualität des P_n wenigstens einen $P_m \subset P_n$ auf sich abbildet[6a]). Wir führen Induktion nach m, der Fall $m = 0$ ist trivial. Wird die Dualität k in homogenen Koordinaten $x_0, \ldots, x_n$ bzw. $u_0, \ldots, u_n$ des P_n bzw. P_n^* etwa durch die Gleichung $u = A\,x$, wo A eine $(n+1)$-reihige Matrix ist, gegeben, so liegt ein Punkt $\bar{p} = (\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_n) \in P_n$ genau dann auf der ihm zugeordneten Hyperebene $k(\bar{p}) = (\bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_n)$, wenn $\sum_{\nu=0}^{n} \bar{u}_\nu \bar{x}_\nu = 0$, d. h. wenn $\bar{p}' A\, \bar{p} = 0$. Es gibt daher sicher einen Punkt $p_0 \in P_n$ mit $p_0 \in k(p_0)$. Die gegebene Dualität ordnet nun, da involutorisch, jedem m-dimensionalen linearen Unterraum von $k(p_0)$ durch p_0 einen ebensolchen zu. Da die Gesamtheit dieser Räume offenbar mit $G_{n-2,m-1}$ identifiziert werden kann und jeder invo- Holomorphismus von $G_{n-2,m-1}$ stets einen Fixpunkt hat (entweder wird er von einer Kollineation des P_{n-2} induziert und wir können die oben bewiesene Aussage anwenden, oder er rührt von einer involutorischen Dualität her und hat dann einen Fixpunkt auf Grund der Induktionsvoraussetzung), so führt die gegebene Dualität also wenigstens einen $P_m \subset P_n$ in sich über. — Es folgt jetzt, daß kein Holomorphismus $g \neq 1$ von $G_{n,m}$ die Eigenschaften einer Decktransformation hat, da g^2 in jedem Falle von einer Kollineation des P_n herrührt.

Für eine singularitätenfreie Quadrik Q_d, $d \geqq 1$, folgt unmittelbar, daß jeder Holomorphismus Fixpunkte hat: Sei Q_d kanonisch in P_{d+1} eingebettet als Hyperfläche der Ordnung 2. Es ist wohlbekannt, daß die Holomorphismen von Q_d genau die Beschränkungen auf Q_d derjenigen linearen Transformationen von P_{d+1} sind, die Q_d in sich überführen (vgl. [9], p. 64 ff.). Wie oben gezeigt, bleibt bei jeder solchen Transformation eine Ebene $P_2 \subset P_{d+1}$ fest. Der mengentheoretische Durchschnitt $S := Q_d \cap P_2$ ist nun entweder dieser P_2 selbst, oder ein (möglicherweise entarteter) Kegelschnitt oder eine Gerade. Da S in sich transformiert wird, folgt unsere Behauptung aus der Tatsache, daß jeder Holomorphismus des P_2, bzw. eines Kegelschnittes bzw. einer Geraden einen Fixpunkt besitzt, q. e. d.

[6a]) Zum Begriff der (involutorischen) Dualität vgl.: G. Pickert: Analytische Geometrie, 3. Aufl., Akad. Verlagsgesellsch. Leipzig 1958; p. 287, 295.

Sei weiter T_n ein n-dimensionaler algebraischer Torus. T_n heiße *allgemein*, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist (vgl. [25], p. 91): *Ist* $(a_{\mu\nu})$ *eine Darstellung der (symmetrischen) Riemannschen Matrix von* T_n *in Normalform (bezüglich irgendeines Divisors in* T_n*), so sind die* $n(n+1)$ *reellen Zahlen* $Re(a_{\nu\mu})$, $Im(a_{\nu\mu})$, $\mu, \nu = 1, \ldots, n$, *algebraisch unabhängig und sämtlich transzendent.*

Wenngleich für jeden Torus T_n gilt: $b_{2n-2}(T_n) = n(2n-1)$, so ist doch nach MATTUCK [25] für einen allgemeinen Torus T_n die $(2n-2)$-te analytische Bettische Zahl immer gleich 1. Da T_n als komplexe Liesche Gruppe eine homogene Mannigfaltigkeit ist, so folgt also aus Satz 1.3 und Hilfssatz 1.7:

Satz 1.9: Jede nicht konstante holomorphe Abbildung eines allgemeinen algebraischen Torus auf einen komplexen Raum ist eine Überlagerungsabbildung auf einen projektiv-algebraischen Raum.

4. Als nächstes betrachten wir vollständige Durchschnitte.

Es sei A eine komplexe Mannigfaltigkeit, S, T, V seien rein-dimensionale komplexe Untermannigfaltigkeiten von A. *Wir nennen* V *den regulären Durchschnitt von* S *und* T, *wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(1) *Es gilt:* $V = S \cap T$, $\dim V = \dim S + \dim T - \dim A$.

(2) *In jedem Punkt von* V *ist der Tangentialraum an* V *der Durchschnitt der Tangentialräume an* S *und* T.

Eine algebraische Mannigfaltigkeit V_k *im* P_n *heißt ein vollständiger und regulärer Durchschnitt von Hyperflächen — kurz: ein vollständiger Durchschnitt — wenn es* $(n-k)$*-singularitätenfreie Hyperflächen* ${}^{(1)}H, \ldots, {}^{(n-k)}H$ *im* P_n *gibt, so daß* $V_k = \bigcap_{\varkappa=1}^{n-k} {}^{(\varkappa)}H$ *und* $\bigcap_{\varkappa=1}^{s} {}^{(\varkappa)}H$ *stets der reguläre Durchschnitt von* $\bigcap_{\varkappa=1}^{s-1} {}^{(\varkappa)}H$ *und* ${}^{(s)}H$ *ist,* $s = 2, \ldots, n-k$.

Es gilt der wichtige

Hilfssatz 1.10: Ist die algebraische Mannigfaltigkeit V_k *im* P_n *ein vollständiger Durchschnitt, so gilt:*

a) $H_\varkappa(V_k, Z) \approx H_\varkappa(P_n, Z)$ *für alle* $\varkappa = 0, \ldots, k-1$,

b) $\pi_\varkappa(V_k, Z) \approx \pi_\varkappa(P_n, Z)$ *für alle* $\varkappa = 0, \ldots, k-1$.

Der Beweis folgt unmittelbar aus einem Satz von S. LEFSCHETZ und R. BOTT (vgl. [1], [7]).

Aus vorstehendem Hilfssatz und Korollar 1.4 folgt sofort, da $b_2(P_n) = 1$, daß jede dimensionserniedrigende holomorphe Abbildung eines vollständigen Durchschnittes V_k, $k \geqq 3$, konstant ist.

Für dimensionserhaltende holomorphe Abbildungen τ von V_k zeigen wir jetzt, daß die Entartungsmenge von τ höchstens $(k-2)$-dimensional sein kann. Dazu beweisen wir zunächst zwei weitere auch an sich interessante Hilfssätze.

Hilfssatz 1.11: Es sei A_d, $d \geqq 1$, *eine projektiv-algebraische Mannigfaltigkeit mit* $b_1(A_d) = 0$, $b_{2d-2}^a(A_d) = 1$. *Dann ist für jede rein* $(d-1)$*-dimensionale analytische Menge* D *in* A_d *die Restmannigfaltigkeit* $A_d - D$ *affin-algebraisch.*

Beweis: Es sei A_d singularitätenfrei im P_n eingebettet. Aus $b^a_{2d-2}(A_d) = 1$ folgt: $H^{(a)}_{2d-2}(A_d, Z) = G \oplus T$, wobei G frei zyklisch und T eine Torsionsgruppe ist. Es sei g ein erzeugendes Element von G und δ die vom gegebenen Divisor D bestimmte $(2d - 2)$-dimensionale ganzzahlige Homologieklasse. Dann gibt es eine natürliche Zahl $k \neq 0$, so daß die Homologieklasse $k\delta$ von den Hyperflächen im P_n einer bestimmten Ordnung j auf A_d ausgeschnitten wird. Da wegen $b_1(A_d) = 0$ die Picardsche Mannigfaltigkeit von A_d nulldimensional ist[7]), sind zwei Divisoren aus der Homologieklasse $k\delta$ stets linear äquivalent, der Divisor kD ist daher insbesondere linear äquivalent zu allen Divisoren desjenigen linearen Systems $\mathfrak{L}'$ auf A_d, das von den Hyperflächen der Ordnung j im P_n auf A_d ausgeschnitten wird; mithin liegt kD in der Vervollständigung $\mathfrak{L}$ dieses linearen Systems $\mathfrak{L}'$. Nun definiert aber bereits $\mathfrak{L}'$ eine biholomorphe Abbildung von A_d auf eine singularitätenfreie algebraische Mannigfaltigkeit in einen projektiven Raum (Veroneseabbildung!). Daher gibt auch $\mathfrak{L}$ zu einer biholomorphen Abbildung τ von A_d auf eine komplexe Untermannigfaltigkeit M eines P_m Anlaß. Da $\mathfrak{L}$ vollständig ist, wird das τ-Bild von kD auf M von einer Hyperebene E des P_m ausgeschnitten. Daher bildet τ die Restmannigfaltigkeit $A_d - D$ biholomorph auf die affin-algebraische Mannigfaltigkeit $M - M \cap E$ ab. Mithin ist $A_d - D$ selbst affin-algebraisch, w. z. b. w.

Hilfssatz 1.12: Es sei X ein kompakter komplexer Raum, derart, daß es zu jeder rein 1-codimensionalen analytischen Menge S in X eine nicht konstante holomorphe Funktion in $X - S$ gibt. Dann ist jede holomorphe Abbildung τ von X auf irgendeinen mit X gleichdimensionalen komplexen Raum Y höchstens in einer 2-codimensionalen analytischen Menge entartet.

Beweis: Angenommen, die Entartungsmenge E von τ wäre 1-codimensional. Es bezeichne E_1 die Vereinigung aller 1-codimensionalen irreduziblen Komponenten der Entartungsmenge von τ; E_1 ist nicht leer und eine rein 1-codimensionale analytische Menge in X. Wir betrachten die Beschränkung τ' von τ auf $X' := X - \overset{-1}{\tau}(\tau(E))$, ersichtlich ist $\tau' : X' \to Y - \tau(E)$ eine Überlagerungsabbildung. Auf X' gibt es, da $X' \subset X - E_1$, nach Voraussetzung eine nicht konstante holomorphe Funktion f'. Von den zu f' bzgl. τ' in $Y - \tau(E)$ gebildeten elementarsymmetrischen Funktionen ist daher auch wenigstens eine nicht konstant. Das ist jedoch unmöglich, denn $\tau(E)$ ist als Bild von Entartungspunkten mindestens 2-codimensional, so daß jede in $Y - \tau(E)$ holomorphe Funktion in ganz Y holomorph fortsetzbar und folglich wegen der Kompaktheit von Y konstant ist. Damit ist ein Widerspruch hergestellt und Hilfssatz 1.12 bewiesen.

Aus den beiden letzten Hilfssätzen sowie aus Satz 1.3 folgt nun insgesamt:

Satz 1.13: Es sei A_d eine projektiv-algebraische Mannigfaltigkeit, $d \geq 1$, es gelte $b_1(A_d) = 0$, $b^a_{2d-2}(A_d) = 1$. Ist dann $\tau : A_d \to B$ eine nicht konstante holo-

[7]) Die Picardsche Mannigfaltigkeit $P(A_d)$ einer projektiv-algebraischen Mannigfaltigkeit A_d kann als die Quotientengruppe der Gruppe aller ganzzahligen nullhomologen Divisoren von A_d nach der Untergruppe der Hauptdivisoren von A_d aufgefaßt werden (für Einzelheiten vgl. [23] sowie [24], p. 734) $P(A_d)$ trägt in natürlicher Weise die Struktur eines komplexen Torus der reellen Dimension $b_1(A_d)$.

morphe Abbildung von A_d auf irgendeinen komplexen Raum B, so gilt $d = \dim B$ und τ ist höchstens in einer $(d-2)$-dimensionalen algebraischen Menge in A_d entartet.

Da $b_1(P_n) = 0$ und $H_2(P_n, Z) = Z$, so gilt wegen Hilfssatz 1.10 der vorstehende Satz insbesondere für alle vollständigen Durchschnitte V_k, falls $k \geq 3$.

Wir merken noch an:

Folgerung 1.14: Ist A_2 eine singularitätenfreie projektiv-algebraische Fläche mit $b_1(A_2) = 0$, $b_2^a(A_2) = 1$, so ist jede nicht konstante holomorphe Abbildung von A_2 auf einen komplexen Raum B_2 eine Überlagerungsabbildung auf einen projektiv-algebraischen Raum.

Insbesondere ist es unmöglich, eine solche Fläche A_2 durch eine echte eigentliche Modifikation aus einem anderen komplexen Raum zu erzeugen.

5. Es erhebt sich die Frage, ob die im Satz 1.13 betrachteten Abbildungen stets Überlagerungsabbildungen sind (für algebraische Bildräume B ist das z. B. nach Korollar 1.5 klar). Ohne einschränkende Bedingungen für B ist dies nicht der Fall, wie sich im § 4 ergeben wird. Wir werden im folgenden jedoch zeigen (Satz 1.18), daß die Antwort bejahend ist, wenn man als Bildräume B lediglich komplexe Mannigfaltigkeiten zuläßt. Das wichtigste Hilfsmittel hierzu ist der sog. Hopfsche Umkehrungshomomorphismus, an den zunächst erinnert werden möge (vgl. [20]):

Es seien X, Y gleichdimensionale kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeiten (also insbesondere kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten); es sei τ eine stetige Abbildung von X auf Y mit einem Abbildungsgrad $g \neq 0$. Dann induziert τ Homomorphismen

$$\tau_* : H_k(X, R) \to H_k(Y, R), \tau^* : H_k(Y, R) \to H_k(X, R), k = 0, 1, \ldots, \dim_R X .$$

τ^* heißt der *Hopfsche Umkehrungshomomorphismus* zur Abbildung τ. τ^* ist injektiv und definiert sogar einen Ringhomomorphismus des Homologieringes $H_*(Y, R)$ in $H_*(X, R)$. Für jedes $\zeta \in H_k(Y, R)$ gilt die Gleichung $\tau_*(\tau^*(\zeta)) = g\zeta$. Die Beschränkung von τ_* auf $\tau^*(H_k(Y, R))$ ist also für alle $k = 0, 1, \ldots, \dim_R X$ bijektiv. Ist insbesondere τ eine holomorphe Abbildung zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten, so führt τ^* analytische Homologieklassen in ebensolche über.

Wir zeigen nun:

Satz 1.15: Es seien X, Y gleichdimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten, X sei projektiv-algebraisch. Es gebe eine surjektive holomorphe Abbildung $\tau : X \to Y$, die wenigstens eine k-dimensionale Faser besitzt, $k > 0$. Dann gilt:

$$b_{2\varkappa}(X) \geq b_{2\varkappa}(Y) + 1 \quad \textit{für} \quad \varkappa = 1, \ldots, k .$$

Beweis: Da X projektiv-algebraisch ist, können wir zu jedem $\varkappa = 1, \ldots, k$ eine irreduzible $\varkappa$-dimensionale analytische Menge $F_\varkappa$ in X finden, so daß $\tau(F_\varkappa)$ ein Punkt $y_0 \in Y$ ist. Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F_\varkappa & \xrightarrow{i} & X \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\ y_0 & \longrightarrow & Y \end{array}$$

liefert nun sofort das gleichfalls kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} H_{2\varkappa}(F_\varkappa, R) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d] & H_{2\varkappa}(X, R) \arrow[d, "\tau_*"] \\ 0 \arrow[r] & H_{2\varkappa}(Y, R)\,. \end{tikzcd}$$

Da X projektiv-algebraisch ist, so gilt $i_*(\varphi_\varkappa) \neq 0$, wenn $\varphi_\varkappa$ die von $F_\varkappa$ repräsentierte Homologieklasse bezeichnet. Andererseits haben wir $\tau_*(i_*(\varphi_\varkappa)) = 0$. Nach dem oben Bemerkten kann also $i_*(\varphi_\varkappa)$ nicht im Raum $\tau^*(H_{2\varkappa}(Y, R)) \subset \subset H_{2\varkappa}(X, R)$ liegen. Da τ^* injektiv abbildet, so folgt die Behauptung[8]).

Es seien noch zwei einfache Folgerungen aus Satz 1.15 besonders hervorgehoben:

Folgerung 1.16: Es seien X, Y gleichdimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten; X sei projektiv-algebraisch und es gelte $b_2(X) = b_2(Y)$. Dann ist jede holomorphe Abbildung von X auf Y eine Überlagerungsabbildung, Y ist projektiv-algebraisch.

Folgerung 1.17: Jede holomorphe Abbildung einer projektiv-algebraischen Mannigfaltigkeit (oder allgemeiner: einer kompakten Kählerschen Mannigfaltigkeit) auf sich ist eine Überlagerungsabbildung.

Wir beweisen abschließend in diesem Paragraphen

Satz 1.18: Es sei A_d eine projektiv-algebraische Mannigfaltigkeit, $d \geqq 1$, es gelte $b_1(A_d) = 0$, $b_2^a(A_d) = b_{2d-2}^a(A_d) = 1$. Dann ist jede nicht konstante holomorphe Abbildung von A_d auf eine komplexe Mannigfaltigkeit B eine Überlagerungsabbildung, B ist projektiv-algebraisch.

Beweis: Sei $\tau: A_d \to B$ eine nicht konstante surjektive holomorphe Abbildung. Unter den gemachten Voraussetzungen wissen wir bereits auf Grund von Satz 1.13, daß τ dimensionserhaltend und höchstens in einer $(d-2)$-dimensionalen analytischen Menge $N \subset A_d$ entartet ist. Angenommen, N wäre nicht leer. Dann gibt es jedenfalls eine algebraische Kurve K in A_d, so daß $\tau(K)$ ein Punkt y_0 ist. Analog wie im Beweis von Satz 1.15 haben wir daher ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} H_2(K, R) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d] & H_2^{(a)}(A_d, R) \arrow[d, "\tau_*"] \\ 0 \arrow[r] & H_2(B, R)\,. \end{tikzcd}$$

Da A_d projektiv-algebraisch ist, so gilt $i_*(\varkappa) \neq 0$, wenn $\varkappa$ die von K repräsentierte Homologieklasse bezeichnet. Wegen $b_2^a(A_d) = 1$ ist also i_* surjektiv.

[8]) Im vorstehenden Beweis wurde die Voraussetzung, daß X projektiv-algebraisch ist, nur benutzt, um $i_*(\varphi_\varkappa) \neq 0$ schließen zu können. Da nun in jeder kompakten Kählerschen Mannigfaltigkeit X eine von einer irreduziblen analytischen Menge repräsentierte Homologieklasse stets $\neq 0$ ist (vgl. [10]), so haben wir sogar bewiesen:

Ist $\tau: X \to Y$ eine holomorphe Abbildung einer kompakten Kählerschen Mannigfaltigkeit X auf eine mit X gleichdimensionale komplexe Mannigfaltigkeit Y und besitzt τ eine k-dimensionale Faser, $k > 0$, so gilt: $b_{2k}(X) \geqq b_{2k}(Y) + 1$.

Folglich muß gelten $\tau_*(H_2^{(a)}(A_d, R)) = 0$. Dies ist jedoch nicht möglich, wie etwa die folgende Überlegung zeigt: Wir setzen $N^* := \overset{-1}{\tau}(\tau(N))$; dann ist $\tau | A_d - N^* : A_d - N^* \to B - \tau(N)$ eine Überlagerungsabbildung. Wir wählen eine irreduzible algebraische Kurve L in A_d, die N^* nicht schneidet; das ist möglich, da N^* mindestens 2-codimensional ist. Weiter liege $\overset{-1}{\tau}(\tau(L))$ nicht in der Verzweigungsmenge von $\tau | A_d - N^*$. Wir betrachten die von der Bildkurve $\tau(L)$ repräsentierte Homologieklasse $\lambda \in H_2^{(a)}(B, R)$. Sicher gilt $\lambda \neq 0$. Anderenfalls wäre nämlich das τ^*-Bild von λ vermöge des von τ induzierten Hopfschen Umkehrungshomomorphismus die Nullklasse in $H_2^{(a)}(A_d, R)$. Das ist jedoch unmöglich, da $\tau^*(\lambda)$ vom Zyklus $\overset{-1}{\tau}(\tau(L))$, dessen Komponenten sämtlich nicht in der Verzweigungsmenge von $\tau | A_d - N^*$ liegen, repräsentiert wird. Es gilt nun aber, wenn wir mit g den Abbildungsgrad von τ (= Blätterzahl der Überlagerung $\tau | A_d - N^*$) bezeichnen: $g\lambda = \tau_*(\tau^*(\lambda))$. Daher wird die von $\overset{-1}{\tau}(\tau(L))$ repräsentierte analytische Homologieklasse vermöge τ_* nicht auf die Nullklasse abgebildet. — Satz 1.18 ist bewiesen.

§ 2. Holomorphe Abbildungen algebraischer Flächen auf algebraische Kurven

1. Im ersten Paragraphen haben wir gesehen, daß ein vollständiger Durchschnitt V_k, $k \geqq 3$, keine nicht konstanten dimensionserniedrigenden holomorphen Abbildungen zuläßt. Für den Fall $k = 2$ liegen die Verhältnisse komplizierter, wie sich im folgenden zeigen wird. Wir benötigen einige Hilfssätze, die wir in etwas allgemeinerer Form als für unsere Zwecke unbedingt erforderlich vorausschicken.

Es sei X_k ein komplexer Raum und Y_e, $0 \leqq e \leqq k-1$, eine komplexe Untermannigfaltigkeit von X_k, die nur aus gewöhnlichen Punkten von X_k besteht. Durch Anwendung des Hopfschen σ-Prozesses auf X_k entlang Y_e gewinnt man aus X_k einen neuen komplexen Raum $\tilde{X}_k$, der vermöge einer holomorphen Abbildung σ auf X_k bezogen ist. $\overset{-1}{\sigma}(Y_e)$ ist eine $(k-1)$-dimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit $\tilde{Y}_{k-1}$ von $\tilde{X}_k$, σ ist biholomorph außerhalb $\tilde{Y}_{k-1}$; $\tilde{Y}_{k-1}$ selbst ist bezüglich $\sigma | \tilde{Y}_{k-1}$ ein holomorphes Faserbündel über Y_e mit P_{k-e-1} als typischer Faser. Im folgenden wird der skizzierte Sachverhalt kurz dadurch beschrieben, daß wir sagen: das Paar $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ geht aus dem Paar (X, Y) durch Anwendung des σ-Prozesses entlang Y hervor. Wir notieren zunächst:

Hilfssatz 2.1: Es sei X_k eine komplexe Mannigfaltigkeit, Y_e und W_{e+1} seien komplexe Untermannigfaltigkeiten von X_k, $Y_e \subset W_{e+1}$, $0 \leqq e \leqq k-1$; das Paar $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ gehe aus dem Paar (X, Y) durch Anwendung des σ-Prozesses entlang Y hervor. Dann ist die abgeschlossene Hülle von $\overset{-1}{\sigma}(W - Y)$ in $\tilde{X}$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit $\tilde{W}_{e+1}$ von $\tilde{X}$ und $\sigma | \tilde{W} : \tilde{W} \to W$ eine biholomorphe Abbildung.

Beweis: Wir dürfen ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß X eine Polyzylinderumgebung des Nullpunktes des $C_k(z_1, \ldots, z_k)$ ist, und daß Y bzw. W in X durch die Gleichungen $z_1 = \cdots = z_{k-e} = 0$ bzw. $z_1 = \cdots$

$\cdots = z_{k-e-1} = 0$ gegeben werden. Sind nun $y_1, \ldots, y_{k-e}$ homogene Koordinaten in P_{k-e-1}, so wird $\tilde{X}$ im Produktraum $X \times P_{k-e-1}$ durch die Gleichungen

$$z_i y_j - z_j y_i = 0\,, \quad i, j = 1, \ldots, k-e$$

gegeben und σ ist die Beschränkung der natürlichen Projektion $X \times P_{k-e-1} \to X$ auf $\tilde{X}$. $\tilde{Y}$ ist der Durchschnitt von $\tilde{X}$ mit der in $X \times P_{k-e-1}$ analytischen Ebene $z_1 = \cdots = z_{k-e} = 0$. Aus den Gleichungen für W in X und denen für $\tilde{X}$ in $X \times P_{k-e-1}$ folgt, daß die Menge $\overset{-1}{\sigma}(W - Y) \subset \tilde{X}$ aus allen Punkten $(z_1, \ldots, z_k, y_1, \ldots, y_{k-e}) \in X \times P_{k-e-1}$ besteht, für die gilt:

$$z_1 = \cdots = z_{k-e-1} = 0,\ z_{k-e} \neq 0,\ y_1 = \cdots = y_{k-e-1} = 0,\ y_{k-e} = 1\,.$$

Die abgeschlossene Hülle von $\overset{-1}{\sigma}(W - Y)$ in $\tilde{X}$ ist daher die Menge

$$\begin{aligned}\tilde{W} := \{(z_1, \ldots, z_k, y_1, \ldots, y_{k-e}) \in X \times P_{k-e-1} : z_1 = \cdots = z_{k-e-1} = y_1 \\ = \cdots = y_{k-e-1} = 0,\ y_{k-e} = 1\}\,.\end{aligned}$$

$\tilde{W}$ ist in $X \times P_{k-e-1}$ das Produkt einer $(e+1)$-dimensionalen analytischen Ebene in X mit einem Punkt von P_{k-e-1} und mithin eine $(e+1)$-dimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit von $\tilde{X}$. Es ist klar, daß $\sigma \mid \tilde{W}$ eine biholomorphe Abbildung von $\tilde{W}$ auf W definiert.

Bemerkung: Allgemeiner läßt sich folgendes beweisen: *Es sei X_k eine komplexe Mannigfaltigkeit; Y_e, W_f seien komplexe Untermannigfaltigkeiten von X_k, $Y_e \subset W_f$, $0 \leq e \leq k-1$, $e < f$; das Paar $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ gehe durch Anwendung des σ-Prozesses aus (X, Y) entlang Y hervor. Dann ist die abgeschlossene Hülle von $\overset{-1}{\sigma}(W - Y)$ in $\tilde{X}$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit $\tilde{W}_f$ von $\tilde{X}$ derart, daß $(\tilde{W}, \tilde{W} \cap \tilde{Y})$ aus (W, Y) durch Anwendung des σ-Prozesses entlang Y entsteht.*

Wir betrachten nun im P_n einen festen linearen Teilraum E_{d-1}, $d > 0$. Die Gesamtheit aller d-dimensionalen linearen Teilräume durch E_{d-1} werde mit $P(E_{d-1})$ bezeichnet; $P(E_{d-1})$ ist in natürlicher Weise mit der Struktur eines $(n-d)$-dimensionalen komplex-projektiven Raumes versehen. Es seien $y_0, \ldots, y_{n-d}$ homogene Koordinaten im $P(E_{d-1})$ und $x_0, \ldots, x_n$ homogene Koordinaten im P_n, so daß E_{d-1} durch die Gleichungen $x_0 = x_1 = \cdots = x_{n-d} = 0$ gegeben wird. Ordnet man dann jedem Punkt $(x_0, \ldots, x_n) \in P_n - E_{d-1}$ den Punkt

$$(y_0, \ldots, y_{n-d}) := (x_0, \ldots, x_{n-d}) \in P(E_{d-1})$$

als Bildpunkt zu, so wird ersichtlich eine holomorphe Abbildung π von $P_n - E_{d-1}$ auf $P(E_{d-1})$ definiert. Die Fasern von π sind gerade die E_{d-1} enthaltenden d-dimensionalen linearen Teilräume von P_n (geschnitten mit $P_n - E_{d-1}$); $P_n - E_{d-1}$ ist überdies bezüglich π ein holomorphes Faserbündel über $P(E_{d-1})$ (mit C_d als Faser). Es gilt nun:

Hilfssatz 2.2: Das Paar $(\tilde{P}_n, M)$ entstehe aus (P_n, E_{d-1}) durch Anwendung des σ-Prozesses entlang E_{d-1}. Dann gibt die holomorphe Faserabbildung $\pi : P_n - E_{d-1} \to P(E_{d-1})$ in eindeutiger Weise zu einer holomorphen Abbildung $\tilde{\pi} : \tilde{P}_n \to P(E_{d-1})$ Anlaß, so daß $\tilde{\pi} | \tilde{P}_n - M = \pi \circ \sigma$. $\tilde{P}_n$ ist bezüglich $\tilde{\pi}$ ein holomorphes Faserbündel über $P(E_{d-1})$ mit P_d als Faser.

Beweis: Die Abbildung $\pi: P_n - E_{d-1} \to P(E_{d-1})$ wurde durch die Gleichungen

$$(x_0, \ldots, x_n) \to (y_0, \ldots, y_{n-d}) := (x_0, \ldots, x_{n-d})$$

definiert, wo $y_0, \ldots, y_{n-d}$ homogene Koordinaten im $P(E_{d-1})$ und $x_0, \ldots, x_n$ homogene Koordinaten im P_n sind, so daß gilt $E_{d-1} = \{x_0 = \cdots = x_{n-d} = 0\}$. Der Graph von π wird daher durch die Gleichungen

$$x_i y_j - x_j y_i = 0, \; i, j = 0, \ldots, n-d$$

gegeben. Diese Gleichungen definieren aber genau $\tilde{P}_n$ als komplexe Untermannigfaltigkeit von $P_n \times P(E_{d-1})$. Die Beschränkung der natürlichen Projektion von $P_n \times P(E_{d-1}) \to P_n$ auf $\tilde{P}_n$ ist gerade die Abbildung σ, während die Beschränkung der natürlichen Projektion von $P_n \times P(E_{d-1}) \to P(E_{d-1})$ auf $\tilde{P}_n$ die gesuchte Abbildung $\tilde{\pi}$ liefert, q. e. d.

2. Wir beweisen nun einen Satz, der in gewissen Fällen die Existenz nicht konstanter dimensionserniedrigender holomorpher Abbildungen liefert.

Satz 2.3: Es sei A_d, $d > 0$, ein irreduzibler, nicht linearer komplexer Unterraum des P_n, es gebe einen linearen Raum E_{d-1}, der in A_d enthalten ist und nur aus gewöhnlichen Punkten von A_d besteht. Ordnet man dann jedem Punkt $x \in A_d - E_{d-1}$ den d-dimensionalen linearen Verbindungsraum von x mit E_{d-1} zu, so wird eine nicht konstante holomorphe Abbildung $\dot{\tau}: A_d - E_{d-1} \to P(E_{d-1})$ definiert, die zu einer holomorphen Abbildung $\tau: A_d \to P(E_{d-1})$ fortsetzbar ist. Für jeden Punkt $x \in E_{d-1}$ ist $\tau(x)$ der Tangentialraum an A_d in x.

Beweis: Es gilt $\dot{\tau} = \pi | A_d - E_{d-1}$, daher ist $\dot{\tau}$ holomorph. Da A_d nicht linear ist, so ist $\dot{\tau}$ nicht konstant. Um $\dot{\tau}$ in E_{d-1} fortzusetzen, wenden wir auf P_n längs E_{d-1} den σ-Prozeß an, sei $\tilde{P}_n$ die entstehende neue komplexe Mannigfaltigkeit und $\sigma: \tilde{P}_n \to P_n$ die Modifikationsabbildung. Nach Hilfssatz 2.1, angewandt auf eine n-dimensionale Umgebung X von E_{d-1}, finden wir einen komplexen Unterraum $\tilde{A}_d$ in $\tilde{P}_n$, so daß $\tilde{\sigma} := \sigma | \tilde{A}_d$ eine biholomorphe Abbildung von $\tilde{A}_d$ auf A_d definiert. Wir setzen nun $\tau := \tilde{\pi} \circ \tilde{\sigma}^{-1}$, wo $\tilde{\pi}$ die natürliche Faserabbildung von $\tilde{P}_n$ auf $P(E_{d-1})$ bezeichnet (Hilfssatz 2.2). τ bildet A_d in $P(E_{d-1})$ ab, ersichtlich gilt $\tau | A_d - E_{d-1} = \dot{\tau}$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß für jeden Punkt $x \in E_{d-1}$ der Bildpunkt $\tau(x)$ der Tangentialraum an A_d in x ist. Wir wählen eine algebraische Kurve K in A_d, die x als gewöhnlichen Punkt besitzt. Es sei t die Tangente an K in x, offenbar können wir K so wählen, daß $t \notin E_{d-1}$. Sei nun $x_\nu \in K - E_{d-1}$ eine gegen x konvergierende Punktfolge, sei t_ν die Verbindungsgerade von x_ν mit x. Da die Geraden t_ν gegen die Gerade t konvergieren, so konvergieren die Ebenen $\tau(x_\nu)$, die von E_{d-1} und t_ν aufgespannt werden, gegen die von E_{d-1} und t aufgespannte Ebene. Das aber ist gerade die Tangentialebene an A_d in x. — Satz 2.3 ist bewiesen[9]).

Folgerung 2.4: Es sei A_d, $d > 0$, ein irreduzibler, nicht linearer komplexer Unterraum des P_n, $n < 2d$, derart, daß jede dimensionserniedrigende holomorphe

[9]) Satz 2.3 kann natürlich auch dadurch bewiesen werden, daß man (unter Vermeidung des σ-Prozesses) $\tau(x)$ in allen Punkten $x \in E_{d-1}$ als den Tangentialraum an A_d in x definiert und zeigt, daß diese Abbildung $\tau: A_d \to P(E_{d-1})$ stetig ist.

Abbildung von A_d konstant ist. Dann enthält jeder lineare Teilraum $P_{d-1} \subset A_d$ singuläre Punkte von A_d. Ist insbesondere A_d singularitätenfrei, so enthält A_d überhaupt keine $(d-1)$-dimensionalen linearen Teilräume.

Es folgt z. B. in Verbindung mit den in § 1 gewonnenen Aussagen (die jedenfalls für Hyperflächen geläufige Tatsache), daß ein nicht linearer vollständiger Durchschnitt V_d im P_n, $d \geqq 3$, $n < 2d$, keine $(d-1)$-dimensionalen linearen Teilräume enthält. Natürlich kann V_d sehr wohl $(d-2)$-dimensionale lineare Teilräume enthalten. Im Falle $n = 4$, $d = 3$ enthalten z. B. alle Quadriken im P_4 stets Geraden.

Mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung beweisen wir noch

Satz 2.5: Jede Hyperfläche H^{2n-3}_{n-1} im P_n, $n \geqq 2$, enthält wenigstens eine Gerade[10]).

Beweis: Sei $g := 2n - 3$, $s := \binom{n+g}{n} - 1$. Wir fassen die Hyperflächen $H^g_{n-1} \subset P_n$ in bekannter Weise als Punkte eines P_s auf. Es sei weiter R die $(2n-2)$-dimensionale Grassmannsche Mannigfaltigkeit der Geraden des P_n. Für jeden Punkt $r \in R$ betrachten wir die Menge $\psi(r)$ aller „Hyperflächen" $h \in P_s$, welche die „Gerade" r enthalten. $\psi(r)$ ist ein $(s-g-1)$-dimensionaler linearer Unterraum von P_s, wie man sofort verifiziert, wenn man homogene Koordinaten $x_0, \ldots, x_n$ im P_n so wählt, daß die „Gerade" r durch die Gleichungen $\{x_2 = \cdots = x_n = 0\}$ gegeben wird. Durch die Zuordnung $r \to \psi(r)$ wird eine algebraische Korrespondenz ψ zwischen R und P_s definiert. Es sei G der Graph von ψ in $R \times P_s$, es seien π_1 bzw. π_2 die natürlichen Projektionen von G in R bzw. P_s. G ist eine algebraische Menge in $R \times P_s$, und zwar bezüglich π_1 ein holomorphes Faserbündel über R mit P_{s-g-1} als typischer Faser. Daher ist G insbesondere irreduzibel und es gilt $\dim G = \dim R + s - g - 1 = s$.

Wir setzen nun $V := \psi(R) = \pi_2(G)$. Unser Satz besagt: $V = P_s$. Um das zu beweisen, genügt es auf Grund allgemeiner Abbildungssätze, da G irreduzibel ist, ein $h \in V$ anzugeben, so daß die Faser $\overset{-1}{\pi_2}(h)$ einen isolierten Punkt besitzt. Wir müssen also eine Hyperfläche H^{2n-3}_{n-1} des P_n finden, die eine isolierte Gerade enthält. Wir behaupten (vgl. [33]):

Die durch die Gleichung $\left\{\sum_{\nu=0}^{n-2} x_0^{2\nu} x_1^{2n-2\nu-4} x_{2+\nu} = 0\right\}$ *im* $P_n(x_0, \ldots, x_n)$ *definierte Hyperfläche $\tilde{H}^g_{n-1}$ enthält genau eine Gerade r_0, die nicht die 2-codimensionale Ebene $E := \{x_0 = x_1 = 0\}$ schneidet.* — Diese Gerade r_0 liegt dann notwendig isoliert in $\tilde{H}^g_{n-1}$, denn jede Gerade in der Nachbarschaft von r_0 würde ebenfalls E nicht schneiden.

Sei r irgendeine Gerade des P_n, so daß $r \subset \tilde{H}^g_{n-1}$, $r \cap E = \emptyset$. Ist (ξ_i) bzw. (η_i) der Schnittpunkt von r mit $\{x_0 = 0\}$ bzw. $\{x_1 = 0\}$, so gilt $(\xi_i) \neq (\eta_i)$; daher wird r durch die Gleichungen $x_0 = \mu\eta_0$, $x_1 = \lambda\xi_1$, $x_{2+\nu} = \lambda\xi_{2+\nu} + \mu\eta_{2+\nu}$, $\nu = 0, \ldots, n-2$, λ, μ homogene Parameter, gegeben. Wegen $r \cap E = \emptyset$ darf man noch $\eta_0 = \xi_1 = 1$ setzen. Da $r \subset \tilde{H}^g_{n-1}$, so muß das Polynom

---

[10]) Dies ist ein Spezialfall eines Satzes von B. L. van der Waerden [33], dessen Beweis wir hier der Vollständigkeit halber wiedergeben.

$\sum_{\nu=0}^{n-2} \mu^{2\nu}\lambda^{2n-2\nu-4}(\lambda\xi_{2+\nu}+\mu\eta_{2+\nu})$ identisch verschwinden. Das ist aber nur möglich, falls $\xi_{2+\nu}=\eta_{2+\nu}=0$ für alle $\nu=0,\ldots,n-2$. r wird also durch die Gleichungen $x_0=\mu$, $x_1=\lambda$, $x_3=\cdots=x_n=0$ gegeben und ist folglich eindeutig bestimmt. — Satz 2.5 ist bewiesen.

Anmerkung: Der Beweis von Satz 2.5 zeigt, daß „fast alle" Hyperflächen H^{2n-3}_{n-1} des P_n auch nur endlich viele Geraden enthalten. Über deren Anzahl gibt es klassische Ergebnisse von H. SCHUBERT ([29], p. 71); z. B. enthält die „allgemeine" Hyperfläche H^5_3 des P_4 genau 2875 verschiedene Geraden, von denen sich zwei verschiedene niemals schneiden (vgl. [33]).

Die Aussage von Satz 2.5 gilt übrigens sogar für alle Hyperflächen H^a_{n-1} des P_n mit $a \leqq 2n-3$; der obige Beweis überträgt sich unmittelbar (vgl. [33]).

3. Wir zeigen jetzt, daß es viele vollständige Durchschnitte der Dimension 2 gibt, die nicht konstante dimensionserniedrigende holomorphe Abbildungen, d. h. Abbildungen auf algebraische Kurven, gestatten.

a) *Quadriken.* — Jede nichtsinguläre Quadrik Q_2 im P_3 ist als Produkt des P_1 mit sich selbst holomorph auf den P_1 abbildbar. (Dies folgt natürlich auch aus Satz 2.3, da Q_2 unendlich viele Geraden enthält.)

b) *Kubiken.* — Auf jeder singularitätenfreien Kubik im P_3 gibt es nach Satz 2.5 wenigstens eine Gerade. Nach Satz 2.3 gestattet also jede singularitätenfreie Kubik im P_3 holomorphe Abbildungen auf den P_1.

c) *Determinantenflächen.* — Durch die Gleichung

$$z_0^q - z_1^q + z_2^q - z_3^q = 0$$

wird im $P_3(z_0, z_1, z_2, z_3)$ für jede natürliche Zahl $q > 1$ eine nicht lineare singularitätenfreie Fläche F_2^q gegeben. F_2^q enthält die Gerade $z_0 = z_1$, $z_2 = z_3$. Nach Satz 2.3 gibt es also auf jeder Fläche F_2^q, $q > 1$, nicht konstante meromorphe Funktionen ohne Unbestimmtheitsstellen.

Wir nennen eine algebraische Fläche im P_3 eine *Determinantenfläche*, wenn sie singularitätenfrei ist und ihre definierende Gleichung in Form einer Determinantengleichung

$$|f_{ik}| = 0, \quad i, k = 1, \ldots, s, \quad s \geqq 2\,,$$

geschrieben werden kann, wobei $f_{i1}, \ldots, f_{is}$ homogene Polynome gleichen Grades $g_i > 0$ sind, $i = 1, \ldots, s$. Die in c) definierten Flächen F_2^q, $q > 1$, sind Beispiele von Determinantenflächen, denn sie werden offenbar durch die Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} z_1 - z_0 & z_2 - z_3 \\ \varphi_{q-1}(z_2, z_3) & \varphi_{q-1}(z_0, z_1) \end{vmatrix} = 0$$

wo $\varphi_{q-1}(u, v) := \sum_{\alpha=0}^{q-1} u^\alpha v^{q-1-\alpha}$ homogen vom Grade $q-1 > 0$ ist, gegeben. Der folgende Satz zeigt, daß die Beispiele in c) notwendig Determinantenflächen sein mußten.

Satz 2.6: Ist die singularitätenfreie algebraische Fläche F_2 im P_3 keine Determinantenfläche, so gibt es keine holomorphen Abbildungen von F_2 auf algebraische Kurven.

Die Aussage folgt unmittelbar aus einem Satz von M. NOETHER ([2], p. 131), der besagt, daß auf einer singularitätenfreien algebraischen Fläche F_2 im P_3, die keine Determinantenfläche ist, jede algebraische Kurve der *genaue* Durchschnitt von F_2 mit einer algebraischen Fläche des P_3 ist[11]). Dies bedeutet aber, daß die 2-te analytische Bettische Zahl von F_2 eins ist. Unsere Behauptung folgt daher aus Satz 1.3.

Es ist bekannt ([2], p. 117), daß die Determinantenflächen F_2^q, $q \geqq 4$, im P_3 eine echte Teilvarietät des P_N, $N := \binom{q+3}{3} - 1$, ausmachen, wenn man die Gesamtheit aller algebraischen Flächen des P_3 der Ordnung q in bekannter Weise als einen projektiven Raum P_N auffaßt. Aus Satz 2.6 folgt daher:

Die „allgemeine" singularitätenfreie algebraische Fläche F_2^q im P_3 der Ordnung $q \geqq 4$ ist nicht holomorph auf eine algebraische Kurve abbildbar.

d) *Vollständige Durchschnitte zweier Quadriken im P_4.* — Wir wollen zeigen:

Ist die singularitätenfreie algebraische Fläche F der vollständige Durchschnitt zweier Quadriken im P_4, so gilt:

(1) *F ist nicht zu einer singularitätenfreien algebraischen Fläche im P_3 homöomorph.*

(2) *F entsteht aus dem P_2 durch jeweils einmalige Anwendung des σ-Prozesses auf fünf verschiedene Punkte des P_2.*

Aus (2) ergibt sich insbesondere, daß F holomorph auf den P_1 abbildbar ist. Durch Anwendung des σ-Prozesses auf einen einzigen Punkt des P_2 entsteht nämlich bereits ein holomorphes Faserbündel $\tilde{P}_2$ über dem P_1. Offenbar ist F holomorph auf $\tilde{P}_2$ abbildbar und deswegen auch auf den P_1.

Zum Beweis der Aussage (1) ziehen wir folgenden Hilfssatz heran:

Hilfssatz 2.7: Die algebraische Fläche F_2 im P_{r+2}, $r \geqq 1$, sei der vollständige Durchschnitt von r Hyperflächen $H_{r+1}^{a_1}, \ldots, H_{r+1}^{a_r}$ der Ordnungen $a_1, \ldots, a_r$. Dann gilt für die Euler-Poincarésche Charakteristik $\chi(F_2)$ von F_2 die Gleichung

$$\chi(F_2) = 2 + b_2(F_2) = a_1 \ldots a_r \cdot \left\{ \sum_{\varrho=1}^{r} (a_\varrho - 2)^2 + \sum_{1 \leq \varrho < \sigma \leq r} (a_\varrho - 1)(a_\sigma - 1) + (3 - r) \right\}.$$

Beweis von Hilfssatz 2.7: Da F_2 nach Hilfssatz 1.10 einfach zusammenhängend ist, so folgt die Gleichung $\chi(F_2) = 2 + b_2(F_2)$ unmittelbar. Der Polynomausdruck für $\chi(F_2)$ selbst errechnet sich aus einer Formel von F. HIRZEBRUCH (vgl. [17], p. 465).

Die obige Aussage (1) ist nun leicht zu bestätigen: die Euler-Poincarésche Charakteristik einer singularitätenfreien algebraischen Fläche der Ordnung g im P_3 bzw. eines vollständigen Durchschnittes zweier Quadriken im P_4 errechnet sich nach vorstehender Formel zu $g^3 - 4g^2 + 6g$ bzw. 8. Da die Gleichung $g^3 - 4g^2 + 6g = 8$ ersichtlich keine ganzzahligen Lösungen hat, so folgt die Behauptung (1).

Zum Beweis der Aussage (2) sei F der vollständige Durchschnitt der Quadriken Q und R des P_4. Es ist bekannt (vgl. z. B. [19], p. 366), daß F wenigstens eine Gerade g enthält. Nach Satz 2.3 gibt es daher eine natürliche nicht kon-

[11]) Wir sagen, daß eine algebraische Kurve K auf F_2 der genaue Durchschnitt von F_2 mit einer algebraischen Fläche $G_2 \subset P_3$ ist, wenn $G_2 \cap F_2 = K$ und jede irreduzible Komponente von $G_2 \cap F_2$ die Multiplizität 1 hat.

stante holomorphe Abbildung $\tau : F \to P_2$, die wie folgt beschrieben wird: Man identifiziert den P_2 mit dem Raum $P(g)$ der 2-dimensionalen Ebenen E im P_4 durch g und ordnet jedem Punkt $p \in F - g$ die Ebene durch p und g zu, während für $p \in g$ die Tangentialebene an F in p der Bildpunkt ist. Wir wollen zeigen, daß τ eine Modifikationsabbildung ist. Dazu bestimmen wir zu jeder Ebene $E \in \tau(F)$ das Urbild $\overset{-1}{\tau}(E)$. Da E weder in Q noch in R enthalten sein kann (z. B. nach Folgerung 2.4), so gibt es zwei Geraden h und k im P_4, so daß $E \cap Q = g \cup h$, $E \cap R = g \cup k$. Die Menge $\overset{-1}{\tau}(E)$ besteht daher genau aus der (i.a. einpunktigen) Menge $h \cap k \cap (F - g)$ sowie aus allen Punkten von g, in denen E tangential an F ist. Wir untersuchen nun die verschiedenen möglichen Fälle.

α) $g = h \neq k$: Dann liegt $h \cap k$ auf g. E ist tangential an Q längs g und tangential an R in $g \cap k$[12]). Daher ist E tangential an F genau in $g \cap k$. Es folgt: $\overset{-1}{\tau}(E) = g \cap k$, d. h. $\overset{-1}{\tau}(E)$ ist einpunktig.

α′) $g = k \neq h$: In derselben Weise wie in α) folgt jetzt $\overset{-1}{\tau}(E) = g \cap h$.

β) $g \neq h$, $g \neq k$, $h \neq k$, $g \cap h = g \cap k$: Es gilt wieder $h \cap k \in g$. E ist tangential an F genau in $g \cap h$. Also folgt $\overset{-1}{\tau}(E) = g \cap h$.

γ) $g \neq h$, $g \neq k$, $h \neq k$, $g \cap h \neq g \cap k$: Jetzt liegt $h \cap k$ außerhalb g. Da E in keinem Punkt von g tangential an F ist, so folgt: $\overset{-1}{\tau}(E) = h \cap k$.

δ) $g \neq h$, $h = k$: Genau der Punkt $g \cap h$ von $h \cap k = h$ liegt auf g. In $g \cap h$ ist indessen E tangential an F. Daher folgt jetzt $\overset{-1}{\tau}(E) = h$, d. h. $\overset{-1}{\tau}(E)$ ist eine Gerade.

ε) $g = h = k$: Dann ist E tangential an F überall längs g, daher folgt $\overset{-1}{\tau}(E) = g$.

Somit hat sich ergeben: $\tau : F \to P_2$ ist eine surjektive holomorphe Abbildung, die Fasern sind einpunktig oder bestehen aus singularitätenfreien rationalen Kurven in F. Hieraus folgt nach allgemeinen Sätzen (vgl. [14]), daß es endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_s \in P_2$ gibt, so daß $\overset{-1}{\tau}(x_\sigma)$ jeweils ein singularitätenfreier P_1 in F ist und $\tau | F - \overset{-1}{\tau}\left(\bigcup_{\sigma=1}^{s} x_\sigma\right)$ eine biholomorphe Abbildung von $F - \overset{-1}{\tau}\left(\bigcup_{\sigma=1}^{s} x_\sigma\right)$ auf $P_2 - \bigcup_{\sigma=1}^{s} x_\sigma$ ist. Aus dem Hopfschen Einzigkeitssatz für den σ-Prozeß (vgl. [22]) ergibt sich schließlich, daß F aus P_2 durch Anwendung des σ-Prozesses in den s Punkten $x_1, \ldots, x_s$ entsteht[13]). Nun wissen wir nach Hilfssatz

[12]) Hier und in β)—ε) benutzen wir die folgende Tatsache (die Spezialfall eines allgemeineren Satzes ist): *Eine Ebene E ist genau dann tangential an eine singularitätenfreie Quadrik S im P_4 in einem Punkte s_0 (d. h. E liegt im Tangentialraum an S in s_0), wenn die Quadrik $E \cap S$ in zwei durch s_0 laufende (nicht notwendig voneinander verschiedene) Geraden zerfällt.* — Der Beweis folgt durch Nachrechnen.

[13]) Wir haben bisher im Beweise von (2) nur benutzt, daß F der mengentheoretische Durchschnitt zweier singularitätenfreier Quadriken des P_4 ist. Jede solche Fläche F entsteht also aus dem P_2 durch Aufblasen endlich vieler Punkte. — Der Fall ε) kann bei vollständigen Durchschnitten übrigens nie vorkommen: Die Ebene E wäre dann nämlich in sämtlichen Tangentialräumen Q_p bzw. R_p an Q bzw. R in den Punkten $p \in g$ enthalten. Da eine 3-dimensionale Ebene des P_4 höchstens in einem Punkte an eine singularitätenfreie Quadrik des P_4 tangential sein kann und der Raum $P(E)$ aller 3-dimensionalen Ebenen im P_4 durch E die Struktur eines P_1 trägt, so müßte also gelten: $\{Q_p, p \in g\} = \{R_p, p \in g\} = P(E)$. Vermöge der Zuordnung $Q_p \to R_p$ wird aber eine holomorphe Abbildung von $P(E)$ auf sich definiert, die mindestens einen Fixpunkt haben muß. Also gäbe es einen Punkt $p \in g$ mit $Q_p = R_p$, was laut Definition eines vollständigen Durchschnittes ausgeschlossen ist.

2.6, daß die 2. Bettische Zahl von F gleich 6 ist. Andererseits muß gelten $b_2(F) = s + 1$ (man benutze z. B. Hilfssatz 3.4). Daher folgt $s = 5$, w. z. b. w.

Die über F gemachten Aussagen lassen sich noch wie folgt ergänzen:

(3) *es sind niemals drei der fünf Punkte* $x_1, \ldots, x_5$ *kollinear.*

(4) F *enthält genau* 16 *verschiedene Geraden, von denen jede von* 5 *weiteren Geraden geschnitten wird.*

Den Beweis stützen wir auf folgende Charakterisierung der Geraden von F:

Jede Gerade auf F *hat den Selbstschnitt* -1; *umgekehrt ist jede irreduzible singularitätenfreie Kurve* K *auf* F *mit negativem Selbstschnitt eine Gerade (im* P_4*).*

Beweis: Durch zweimalige Anwendung der Whitneyschen Multiplikationsformel für Chernsche Klassen folgt zunächst (in ähnlicher Weise wie im Beweise von Hilfssatz 4.6): $c_1(F) = h$, wo $h \in H^2(F,Z)$ das Bild des natürlichen Generators von $H^2(P_4,Z)$ bezüglich der natürlichen Einbettung $i: F \to P_4$ ist. Ist nun p das Geschlecht von K und q die Ordnung von K im P_4, so folgt hieraus durch nochmalige Anwendung der Multiplikationsformel:

$$q = 2 - 2p + K \circ K,$$

wo $K \circ K$ für den Selbstschnitt von K steht. Diese Gleichung lehrt aber, daß $K \circ K < 0$ genau dann auftritt, wenn $p = 0, q = 1$, d. h. wenn K eine Gerade im P_4 ist. Alsdann gilt sogar $K \circ K = -1$.

Nunmehr folgt (3) unmittelbar: Lägen nämlich drei der Punkte $x_1, \ldots, x_5$ auf einer Geraden l des P_2, so enthielte $\overset{-1}{\tau}(l)$ eine irreduzible singularitätenfreie Kurve S mit $S \circ S \leq -2$, was nach vorstehendem nicht möglich ist.

Aus der Beschreibung der Abbildung τ in $\alpha) - \varepsilon)$ folgt, daß jede Gerade g von F genau von fünf weiteren Geraden auf F geschnitten wird, denn die g schneidenden Geraden und nur diese werden vermöge τ auf einen Punkt abgebildet (beachte: $\tau(g)$ ist niemals einpunktig, da der Fall ε) nach Fußnote [13]) nicht auftreten kann).

Sei nun g fest gewählt, seien $h_1, \ldots, h_5$ die fünf weiteren g schneidenden Geraden, sei $\tau(h_\sigma) = x_\sigma$. Ist dann h irgendeine Gerade in F, $h \neq h_\sigma$, $\sigma = 1, \ldots, 5$, so ist $\tau(h)$, da h jede Gerade $h_1, \ldots, h_5$ in höchstens einem Punkt transversal schneidet, eine irreduzible singularitätenfreie rationale Kurve im P_2. Ist q die Ordnung von $\tau(h)$, $q = 1,2$, und geht $\tau(h)$ etwa durch a der fünf Punkte x_σ, $0 \leq a \leq 5$, so folgt: $h \circ h = q^2 - a$. Da andererseits $h \circ h = -1$, so sind also nur die beiden Fälle $q = 1, a = 2$ und $q = 2, a = 5$ möglich. Der letztere Fall liegt vor, falls $h = g$. Im ersten Fall ist $\tau(h)$ eine Gerade im P_2 durch zwei der fünf Punkte x_σ. Da es 10 solche Geraden gibt und jede derselben auch wirklich das τ-Bild einer Geraden auf F ist, so folgt die Behauptung (4)[14]).

4. In allen obigen Beispielen a) bis d) von holomorphen Abbildungen 2-dimensionaler vollständiger Durchschnitte auf algebraische Kurven ist die Bildkurve ein P_1. Ferner sind mit Ausnahme des Beispiels *a*) die konstruierten Abbildungen niemals regulär[15]). All dieses ist kein Zufall, denn es gilt:

Satz 2.8: Die singularitätenfreie algebraische Fläche F *sei ein vollständiger Durchschnitt im* P_n, *es sei* $\pi: F \to K$ *eine holomorphe Abbildung von* F *auf eine algebraische Kurve. Dann ist* K *rational.*

Ist π *überdies regulär, so ist* F *als Quadrik* $P_1 \times P_1$ *in einem linearen* $P_3 \subset P_n$ *enthalten, und* π *ist eine der natürlichen Projektionen von* $P_1 \times P_1$ *auf* P_1.

---

[14]) Für den Fall, daß F der Durchschnitt zweier „allgemeiner" Quadriken des P_4 ist, sind alle oben gemachten Bemerkungen klassisch. Vgl. etwa: J. G. Semple und L. Roth: Introduction to algebraic geometry; Oxford University Press 1949, insbesonders p. 141.

[15]) Eine holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ heißt *regulär*, wenn X, Y komplexe Mannigfaltigkeiten sind und in jedem Punkt $x \in X$ der Rang der Funktionalmatrix von τ mit min (dim X, dim Y) übereinstimmt.

Wir beweisen zunächst

Lemma 2.9: Es seien X, Y komplexe Räume, X habe eine endliche Fundamentalgruppe. Es sei $\tau : X \to Y$ eine eigentliche surjektive holomorphe Abbildung. Dann ist auch die Fundamentalgruppe von Y endlich[16]).

Beweis: Es seien $\tilde{X}$ bzw. $\tilde{Y}$ die universellen Überlagerungsräume von X bzw. Y, die wir uns mit der kanonischen komplexen Struktur versehen denken; es seien ξ bzw. η die natürlichen holomorphen Projektionen auf X bzw. Y. Nach Voraussetzung liegt $\tilde{X}$ endlich-blättrig über X, daher ist ξ eigentlich. Die Abbildung τ kann zu einer holomorphen Abbildung $\tilde{\tau} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ geliftet werden, so daß $\eta \circ \tilde{\tau} = \tau \circ \xi$. Wir zeigen zunächst, daß $\tilde{\tau}$ surjektiv ist. Für jede Menge $\tilde{K} \subset \tilde{Y}$ gilt $\tilde{\tau}^{-1}(\tilde{K}) \subset (\tau \circ \xi)^{-1}(\eta(\tilde{K}))$: ist nämlich $\tilde{x} \in \tilde{\tau}^{-1}(\tilde{K})$, so folgt sofort $(\eta \circ \tilde{\tau})(\tilde{x}) \in \eta(\tilde{K})$, d. h. $(\tau \circ \xi)(\tilde{x}) \in \eta(\tilde{K})$, d. h. $\tilde{x} \in (\tau \circ \xi)^{-1}(\eta(\tilde{K}))$. Für eine kompakte Menge $\tilde{K} \subset \tilde{Y}$ ist wegen der Eigentlichkeit von τ und ξ auch $(\tau \circ \xi)^{-1}(\eta(\tilde{K}))$ kompakt. Daher ist wegen obiger Inklusion auch $\tilde{\tau}^{-1}(\tilde{K})$ kompakt, so daß $\tilde{\tau}$ eine eigentliche Abbildung ist. $\tilde{\tau}(\tilde{X})$ ist alsdann eine analytische Menge in $\tilde{Y}$. Da $(\eta \circ \tilde{\tau})(\tilde{X}) = Y$ und $\tilde{Y}$ mit Y gleichdimensional ist, so muß sogar gelten $\tilde{\tau}(\tilde{X}) = \tilde{Y}$.

Um nun zu zeigen, daß Y eine endliche Fundamentalgruppe hat, genügt es, η als eigentlich nachzuweisen. Dazu genügt es wieder zu zeigen, daß $\overset{-1}{\eta}(K) \subset \tilde{\tau}((\tau \circ \xi)^{-1}(K))$ für alle $K \subset Y$, denn für kompaktes K folgt hieraus die Kompaktheit von $\overset{-1}{\eta}(K)$. Sei also $\tilde{y} \in \overset{-1}{\eta}(K)$. Da $\tilde{\tau}$ surjektiv ist, so gibt es einen Punkt $\tilde{x} \in \tilde{X}$ mit $\tilde{\tau}(\tilde{x}) = \tilde{y}$, es folgt daher $(\eta \circ \tilde{\tau})(\tilde{x}) \in K$, d. h. $(\tau \circ \xi)(\tilde{x}) \in K$ d. h. $\tilde{x} \in (\tau \circ \xi)^{-1}(K)$. Daraus ergibt sich aber $\tilde{y} \in \tilde{\tau}((\tau \circ \xi)^{-1}(K))$, w. z. b. w.

Anmerkung: Ist im obigen Lemma X insbesondere einfach-zusammenhängend, so braucht Y natürlich nicht einfach-zusammenhängend zu sein. Als einfaches Beispiel betrachten wir im $P_n(x_1, \ldots, x_{n+1})$, $n \geqq 3$, $n + 2$ Primzahl, die durch die Gleichung

$$x_1^{n+2} + \cdots + x_{n+1}^{n+2} = 0$$

definierte singularitätenfreie Hyperfläche H, die nach Hilfssatz 1.10 einfach-zusammenhängend ist. Ist ε eine primitive $(n + 2)$-te Einheitswurzel, so wird durch die Zuordnung

$$\sigma : (x_1, \ldots, x_\nu, \ldots, x_{n+1}) \to (\varepsilon x_1, \ldots, \varepsilon^\nu x_\nu, \ldots, \varepsilon^{n+1} x_{n+1})$$

eine lineare Transformation σ des P_n auf sich definiert. Die ganzzahligen Potenzen von σ formen eine zyklische Gruppe der Ordnung $n + 2$. Die Fixpunkte eines jeden Elementes σ^k, $k = 1, \ldots, n + 1$, sind, da $n + 2$ eine Primzahl ist, genau die $(n + 1)$ Punkte $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$. Es gilt nun $\sigma^k(H) = H$ für alle $k = 1, \ldots, n + 1$. Da keine Transformation σ^k einen Fixpunkt auf H besitzt, so erzeugt also $\sigma | H$ eine zyklische Gruppe G der Ordnung $n + 2$ von Holomorphismen von H, die sämtlich fixpunktfrei sind. Die komplexe Quotientenmannigfaltigkeit $L := H | G$, die nach Hilfssatz 1.6 sogar projektiv-algebraisch ist, besitzt folglich die Hyperfläche H als universelle Überlagerung mit den Elementen von G als Decktransformationen. Die Fundamentalgruppe von

[16]) Vgl. auch [28], p. 172, wo der dimensionsgleiche Fall betrachtet wird.

L ist daher zyklisch von der Ordnung $n+2$, indessen ist vermöge der natürlichen Projektion H holomorph (und sogar lokal-topologisch) auf L abgebildet.[17])

Folgerung 2.10: Es sei K eine singularitätenfreie algebraische Kurve; es gebe einen kompakten komplexen Raum X mit endlicher Fundamentalgruppe und eine holomorphe Abbildung von X auf K. Dann ist K rational.

Die Kurve K muß nämlich nach Lemma 2.9 eine endliche Fundamentalgruppe haben. Das ist aber nur für rationale Kurven der Fall.

Wir beweisen nun Satz 2.8. Es sei K^* die Normalisierung von K und $\varkappa: K^* \to K$ die zugehörige holomorphe Projektion. π gibt in natürlicher Weise zu einer holomorphen Abbildung $\pi^*: F \to K^*$ Anlaß, so daß gilt $\varkappa \circ \pi^* = \pi$. Da F als vollständiger Durchschnitt einfach-zusammenhängend ist, so muß K^* nach Folgerung 2.10 rational sein. Da K und K^* vermöge $\varkappa$ birational äquivalent sind, ist die erste Aussage von Satz 2.8 bewiesen.

Zum Beweis der zweiten Aussage von Satz 2.8 dürfen wir auf Grund des vorangehenden für K den P_1 wählen. Die Fasern von $\pi: F \to P_1$ sind notwendig zusammenhängend. Nach dem Faktorisierungssatz (§ 1.3) gibt es nämlich eine Riemannsche Fläche G und (surjektive) holomorphe Abbildungen $\alpha: F \to G$, $\beta: G \to P_1$, so daß $\pi = \beta \circ \alpha$ und die Fasern von α sämtlich zusammenhängend sind. G ist wieder ein P_1, mit π ist auch β regulär. Eine reguläre holomorphe Abbildung des P_1 auf sich ist aber biholomorph. Daher haben π und α dieselben Fasern.

Betrachten wir nun F und P_1 als differenzierbare Mannigfaltigkeiten und π als eine reguläre differenzierbare Abbildung, so folgt aus einem Satz von Ch. Ehresmann (vgl. [12], p. 31), daß F ein differenzierbares Faserbündel über P_1 mit π als Projektion ist. Daher gilt für die Euler-Poincarésche Charakteristik: $\chi(F) = \chi(P_1)\,\chi(H)$, wo H für die typische Faser des Bündels steht. Ist etwa H eine Kurve vom Geschlechte p, so folgt: $\chi(F) = 4(1-p)$. Es sei nun F der vollständige Durchschnitt von r Hyperflächen der Ordnungen $a_1, \ldots, a_r$ im P_{r+2}, $r \geqq 1$, $n = r+2$. Dann folgt aus Hilfssatz 2.7

$$4(1-p) = a_1 \ldots a_r \cdot \left\{ \sum_{\varrho=1}^{r} (a_\varrho - 2)^2 + \sum_{1 \leq \varrho < \sigma \leq r} (a_\varrho - 1)(a_\sigma - 1) + (3-r) \right\}.$$

Eine elementare Rechnung zeigt, daß der Ausdruck in der geschweiften Klammer für alle $a_1, \ldots, a_r \geqq 1$ stets mindestens 2 ist. Daraus folgt zunächst $p = 0$ und weiter $a_\varrho = 1$ für alle a_ϱ bis auf eines, welches 2 sein muß. Dies bedeutet aber, daß F der vollständige Durchschnitt von $(r-1)$ Hyperebenen und einer Quadrik ist. Es bleibt zu zeigen, daß π eine der beiden natürlichen Projektionen von $F = P_1 \times P_1$ auf P_1 ist. Die „horizontalen" bzw. „vertikalen" Geraden von $P_1 \times P_1$ repräsentieren zwei Homologieklassen η bzw. ζ von $H_2(F, Z)$, die eine Basis von $H_2(F, Z)$ bilden. Es gilt $\eta^2 = \zeta^2 = 0$, $\eta\zeta = 1$, ferner ist jede analytische Kurve K in F, deren Homologieklasse ein Vielfaches von η bzw. ζ ist, aus Schnittzahlgründen eine horizontale bzw. vertikale Gerade. Sei nun D irgendeine Faser von π und $\delta = a\,\eta + b\,\zeta$, $a, b \in Z$, die von D repräsentierte ganzzahlige Homologieklasse. Aus $\delta^2 = 0$ folgt sofort $2ab = 0$,

[17]) Vgl. hierzu auch [13], p. 94.

d. h. $a = 0$, oder $b = 0$. Ist etwa $b = 0$, d. h. ist D eine horizontale Gerade in F, so müssen aus Schnittzahlgründen auch alle weiteren Fasern von π horizontale Geraden in F sein, w. z. b. w.

§ 3. Beispiele algebraischer Flächen F mit $b_2^a(F) > 1$, die nicht holomorph auf algebraische Kurven abbildbar sind

1. Alle im § 1 beschriebenen algebraischen Mannigfaltigkeiten A_d, $d > 0$, die keine dimensionserniedrigenden nicht konstanten holomorphen Abbildungen gestatten, haben 1 als $(2d-2)$-te analytische Bettische Zahl. Im folgenden werden wir zeigen, daß es auch algebraische Mannigfaltigkeiten A_d mit $b_{2d-2}^a(A_d) > 1$ gibt, für die jede dimensionserniedrigende holomorphe Abbildung konstant ist.

Zunächst führen wir eine Redeweise ein, die eine bequeme Formulierung unseres Ergebnisses ermöglicht. Es sei V eine komplexe Mannigfaltigkeit und p ein Punkt in V. Wir wollen sagen, daß die komplexe Mannigfaltigkeit $\hat{V}$ aus V durch k-fache Anwendung des σ-Prozesses in p hervorgeht, wenn es $k+1$ Paare

$$(V_0, W_0), (V_1, W_1), \ldots, (V_k, W_k)$$

komplexer Mannigfaltigkeiten gibt mit folgenden Eigenschaften:

(1) Es gilt $(V_0, W_0) = (V, p)$ und $V_k = \hat{V}$.

(2) Zu jedem $\varkappa = 0, \ldots, k-1$ gibt es einen Punkt $p_\varkappa \in W_\varkappa$, so daß $(V_{\varkappa+1}, W_{\varkappa+1})$ aus $(V_\varkappa, p_\varkappa)$ durch Anwendung des σ-Prozesses auf $V_\varkappa$ in $p_\varkappa$ hervorgeht.

Sind $p_1, \ldots, p_n \in V$ verschiedene Punkte und geht $\hat{V}$ aus V durch jeweils k_ν-malige Anwendung des σ-Prozesses in p_ν hervor, $\nu = 1, \ldots, n$, so werde zur Abkürzung gesetzt: $\hat{V} = V < p_1, k_1, \ldots, p_n, k_n >$. Weiter möge eine singularitätenfreie algebraische Fläche im P_3 *allgemein* genannt werden, wenn sie keine Determinantenfläche ist.

Der Hauptzweck dieses Paragraphen ist nun der Beweis von

Satz 3.1: Es sei $F_2^g \subset P_3$ eine allgemeine singularitätenfreie algebraische Fläche der Ordnung g; es seien p_1, p_2, p_3 drei verschiedene Punkte von F_2^g.

a) Ist $g \geqq 5$ keine Quadratzahl, so ist jede holomorphe Abbildung von $F_2^g\langle p_1, k\rangle$, $k = 1,2$, in eine algebraische Kurve konstant, indessen gilt:

$$b_2^a(F_2^g\langle p_1, k\rangle) = k + 1 .$$

b) Ist $g \equiv 7 \pmod 8$, so ist jede holomorphe Abbildung von $\hat{F} := F_2^g \langle p_1, k_1, p_2, k_2, p_3, k_3\rangle$, $k_i = 1,2$, in eine algebraische Kurve konstant, indessen gilt: $b_2^a(\hat{F}) = 1 + \sum_{i=1}^{3} k_i$.

2. Zum Beweise dieses Satzes möge zunächst an einige Begriffe erinnert werden. Ist M irgendeine komplexe Mannigfaltigkeit und L eine rein 1-codimensionale analytische Menge in M, so ist in jedem Punkt $p \in L$ die *Ordnung von L* wie folgt definiert: Das Ideal L_p aller in p holomorphen Funktionskeime, die in p auf L verschwinden, ist ein Hauptideal. Zwei erzeugende Elemente f_1, f_2 von

L_p unterscheiden sich nur durch eine Einheit in p, daher stimmen die Ordnungen von f_1 und f_2 in p überein (unter der Ordnung $o_p(f)$ einer in p holomorphen Funktion f versteht man bekanntlich den Grad des ersten in der Diagonalreihenentwicklung von f um p vorkommenden, nicht identisch verschwindenden homogenen Polynoms; die Diagonalreihe ist dabei bezüglich irgendwelcher in p zentrierter komplexer Koordinaten zu nehmen). Unter der Ordnung $o_p(L)$ von L in $p \in L$ wird nun die Ordnung $o_p(f)$ eines erzeugenden Elementes von L_p verstanden.

Von nun an sei M eine singularitätenfreie algebraische Fläche. Sind d_1 und d_2 zwei Divisoren in M, die keine gemeinsamen Komponenten haben, so ist in jedem Punkt $p \in d_1 \cap d_2$ die Schnittmultiplizität $\nu_p(d_1, d_2)$ wohldefiniert (vgl. z. B. [34], p. 108 ff.). Die Zahl $d_1 \circ d_2 := \sum_{p \in d_1 \cap d_2} \nu_p(d_1, d_2)$ heißt die *algebraische Schnittzahl* von d_1 und d_2.

Die Menge aller Divisoren in M bildet eine abelsche Gruppe $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_M$, es gibt kanonische Homomorphismen $\bar{\Theta} : \mathfrak{D} \to H_2(M, Z)$ bzw. $\Theta : \mathfrak{D} \to H_2(M, R)$. Es gilt $\bar{\Theta}(d_1) = \bar{\Theta}(d_2)$ sicher dann, wenn d_1 und d_2 linear äquivalent sind. Ist die algebraische Schnittzahl der Divisoren d_1 und d_2 definiert, so gilt $d_1 \circ d_2 = \bar{\Theta}(d_1) \circ \bar{\Theta}(d_2)$, wo rechts die topologische Schnittzahl von $\bar{\Theta}(d_1)$ und $\bar{\Theta}(d_2)$ (bezüglich der natürlichen Orientierung von M) steht.

Ist $\tilde{M}$ eine weitere singularitätenfreie algebraische Fläche und $\pi : \tilde{M} \to M$ eine holomorphe surjektive Abbildung, so gibt es einen natürlichen Homomorphismus $\tilde{\pi} : \mathfrak{D}_M \to \mathfrak{D}_{\tilde{M}}$. Wir zeigen nun zunächst 2 Hilfssätze.

Hilfssatz 3.2: Es sei K eine algebraische Kurve in M, k sei der von K bestimmte Divisor. Die komplexe Mannigfaltigkeit $\tilde{M}$ entstehe aus M durch Anwendung des σ-Prozesses in einem Punkt $p \in K$. Dann ist die abgeschlossene Hülle von $\overset{-1}{\sigma}(K \cap (M - p))$ eine algebraische Kurve $\tilde{K}$ in $\tilde{M}$ und es gilt, wenn wir mit $\tilde{k}$ bzw. t den von $\tilde{K}$ bzw. $\overset{-1}{\sigma}(p)$ bestimmten Divisor bezeichnen:

$$\tilde{\sigma}(k) = \tilde{k} + o_p(K)\, t\,.$$

Beweis: Es ist klar, daß $\tilde{K}$ algebraisch in $\tilde{M}$ ist. Wir wählen eine Überdeckung $U_0, U_1, \ldots$ von M durch offene Mengen U_ν, so daß $p \in U_0$, $p \notin U_\nu$, $\nu \geqq 1$, und $K \cap U_\nu$ jeweils durch eine in U_ν holomorphe Funktion f_ν definiert wird. Der Divisor k ist dann durch die Verteilung $\{U_\nu, f_\nu\}$ und der Divisor $\tilde{\sigma}(k)$ durch die Verteilung $\{\overset{-1}{\sigma}(U_\nu), f_\nu \circ \sigma\}$ gegeben. Man rechnet sofort nach, daß $f_\nu \circ \sigma$, $\nu \geqq 1$, genau auf $\tilde{K} \cap \overset{-1}{\sigma}(U_\nu)$ in 1. Ordnung verschwindet, während $f_0 \circ \sigma$ auf $\tilde{K} \cap \overset{-1}{\sigma}(U_0)$ in 1. Ordnung und überdies auf $\overset{-1}{\sigma}(p)$ in der Ordnung $o_p(f_0) = o_p(K)$ verschwindet. Daraus folgt die Behauptung.

Folgerung 3.3: Zu jedem Divisor $\tilde{d}$ in $\tilde{M}$ gibt es einen Divisor d in M und eine ganze Zahl m, so daß $\tilde{d} = \tilde{\sigma}(d) + mt$.

Hilfssatz 3.4: Die singularitätenfreie algebraische Fläche $\tilde{M}$ entstehe aus M durch Anwendung des σ-Prozesses in einem Punkt $p \in M$. Dann gilt

$$b_2(\tilde{M}) = b_2(M) + 1 \quad b_2^0(\tilde{M}) = b_2^0(M) + 1\,.$$

Beweis: Die erste Gleichung ist ein Spezialfall von Satz 23 in [3], p. 270. Zum Beweis der zweiten Gleichung sei $\tilde{\delta}$ irgendeine 2-dimensionale analytische reelle Homologieklasse in $\tilde{M}$. Wir wählen einen Divisor $\tilde{d}$ in $\tilde{M}$ mit $\Theta(\tilde{d}) = \tilde{\delta}$. Gemäß Folgerung 3.3 gilt eine Darstellung $\tilde{d} = \tilde{\sigma}(d) + mt$, wo d ein Divisor in M ist. Mithin folgt: $\tilde{\delta} = \Theta(\tilde{\sigma}(d)) + m\,\Theta(t)$. Nun gilt aber $\Theta\tilde{\sigma} = \sigma^*\,\Theta$, wo σ^* den Hopfschen Umkehrungshomomorphismus bezeichnet. Jedes $\tilde{\delta} \in H_2^a(\tilde{M}, R)$ kann also in der Form

$$\tilde{\delta} = \sigma^*(\delta) + m\tau$$

geschrieben werden, wo $\delta \in H_2^{(a)}(M, R)$, $\sigma^*(\delta) \in H_2^{(a)}(\tilde{M}, R)$ und τ die vom Divisor t definierte analytische reelle Homologieklasse ist. Da der Hopfsche Umkehrungshomomorphismus injektiv ist, so folgt: $b_2^a(M) \leqq b_2^a(\tilde{M}) \leqq b_2^a(M) + 1$. Wegen $\tau \notin \sigma^*(H_2(M, R))$ ergibt sich hieraus die Behauptung.

Ist M irgendeine algebraische Fläche und $\alpha : M \to P_1$ eine holomorphe Abbildung von M auf den P_1, so sind die von den Fasern $\overset{-1}{\alpha}(y)$, $y \in P_1$, bestimmten Divisoren (sämtlich mit ihren natürlichen Multiplizitäten versehen) untereinander stets linear äquivalent. Sie bestimmen daher dieselbe Homologieklasse $\lambda \in H_2^{(a)}(M, R)$; es gilt $\lambda \neq 0$, $\lambda \circ \lambda = 0$.

Wir beweisen nun Satz 3.1. Die gemachten Aussagen über die 2-ten analytischen Bettischen Zahlen ergeben sich unmittelbar aus Hilfssatz 3.4 und der Gleichung $b_2^a(F_2^g) = 1$, die aus dem Satz von M. Noether folgt (vgl. § 2.3. c)). Würde nun etwa die Fläche $F' := F_2^g\langle p_1, 1\rangle$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung auf den P_1 gestatten[18]), so gäbe es ein $\delta' \in H_2^a(F', R)$, so daß $\delta' \neq 0$, $\delta' \circ \delta' = 0$. Es gibt einen Divisor d' in F' mit $\Theta(d') = \delta'$. Nach Folgerung 3.3 kann man d' in der Form $\tilde{\sigma}(d) + mt$ schreiben. Ist nun e der von einer allgemeinen Ebene auf F_2^g ausgeschnittene Divisor, so ist d auf Grund des Noetherschen Satzes zu einem ganzzahligen Vielfachen ne linear äquivalent. Daher gilt $\delta' = n\,\Theta\tilde{\sigma}(e) + m\,\Theta(t)$ und weiter $0 = [n\,\Theta\tilde{\sigma}(e) + m\,\Theta(t)]^2$, wobei $(n, m) \neq (0, 0)$. Es sei q' der natürliche Generator von $H_0(F', R)$. Da $\Theta\tilde{\sigma}(e)$ und $\Theta(t)$ punktfremde Repräsentanten besitzen, so ist $\Theta\tilde{\sigma}(e) \circ \Theta(t) = 0 \cdot q'$. Da ferner $\Theta(t) \circ \Theta(t) = -q'$, so folgt $0 = n^2(\Theta\tilde{\sigma}(e))^2 - m^2 q'$.

Weiter haben wir

$$(\Theta\tilde{\sigma}(e))^2 = (\sigma^*\,\Theta(e))^2 = \sigma^*(\Theta(e)^2)\,.$$

Es gilt aber $(\Theta(e))^2 = gq$ bezüglich des natürlichen Generators q von $H_0(F_2^g, R)$, da sich zwei allgemeine Ebenen des P_3 auf F_2^g in genau g Punkten einfach schneiden. Mithin folgt, wenn man noch $\sigma^*(q) = q'$ berücksichtigt:

$$0 = n^2 g - m^2\,.$$

---

[18]) F ist nach Hilfssatz 1.10 einfach-zusammenhängend. Da F' aus F durch Anwendung des σ-Prozesses entsteht, so ist auch F' einfach-zusammenhängend. Nach Folgerung 2.10 kommen mithin als holomorphe Abbildungen von F' auf algebraische Kurven nur Abbildungen auf rationale Kurven in Betracht. Gibt es aber eine solche Abbildung, so findet man durch Übergang zur Normalisierung der Kurve auch eine holomorphe Abbildung von F' auf den P_1.

Also müßte g eine Quadratzahl sein im Widerspruch zur Annahme. Der Fall $F_2^g\langle p_1, 2\rangle$ sowie die Aussagen von b) werden analog bewiesen. Betrachten wir z. B. die Fläche $\tilde{F} = F_2^g\langle p_1, 2; p_2, 2; p_3, 2\rangle$. Entsprechend wie oben würde die Existenz einer holomorphen Abbildung von F auf den P_1 jetzt 7 natürliche Zahlen $(n_1, \ldots, n_7) \neq (0, \ldots, 0)$ liefern, so daß $g n_1^2 - \sum_{i=2}^{7} n_i^2 + 2n_2n_5 + 2n_3n_6 + 2n_4n_7 = 0$, d. h. es müßte gelten

$$g n_1^2 = (n_2 - n_5)^2 + (n_3 - n_6)^2 + (n_4 - n_7)^2 .$$

Ist aber $g \equiv 7 \pmod 8$, so hat die diophantische Gleichung $g x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ keine nichttriviale ganzzahlige Lösung (vgl. [4], p. 263). Hieraus folgt die Behauptung.

Es wäre interessant, singularitätenfreie algebraische Flächen F mit $b_2^a(F) > 1$ zu finden, die keine singularitätenfreien Kurven mit negativem Selbstschnitt enthalten und nicht holomorph auf algebraische Kurven abbildbar sind. Ferner wäre es wünschenswert, (einfach-zusammenhängende) algebraische Flächen mit vorgegebener 2-ter analytischer Bettischer Zahl zu kennen, die keine holomorphen Abbildungen auf Kurven (bzw. den P_1) gestatten. Dreidimensionale algebraische Mannigfaltigkeiten dieser Art (mit vorgegebener 4-ter analytischer Bettischer Zahl) gewinnt man sofort aus dem P_3 durch σ-Modifikation in einer endlichen Punktmenge.

§ 4. Beispiele von Modifikationsabbildungen singularitätenfreier Hyperflächen im P_4

1. Jede nicht konstante holomorphe Abbildung einer einfach-zusammenhängenden projektiv-algebraischen Mannigfaltigkeit A_d, $d \geqq 1$, mit $b_2^a(A_d) = b_{2d-2}^a(A_d) = 1$ auf eine komplexe Mannigfaltigkeit ist nach Satz 1.18 eine holomorphe Überlagerungsabbildung. Es ist daher nicht möglich, solche Mannigfaltigkeiten A_d durch eine echte Modifikation aus einer komplexen Mannigfaltigkeit B zu erzeugen. In diesem Paragraphen soll gezeigt werden, daß für $d \geqq 3$ die Voraussetzung, daß B keine Singularitäten besitzt, wesentlich ist[19]). Wir behaupten:

Satz 4.1: Es gibt eine (dreidimensionale) singularitätenfreie Hyperfläche 5. Ordnung H_3^5 im P_4 und eine holomorphe Abbildung τ von H_3^5 auf einen normalen komplexen Raum B mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine in H_3^5 enthaltene Gerade g, so daß $\tau(g)$ ein einziger Punkt ist und $H_3^5 - g$ vermöge τ biholomorph auf $B - \tau(g)$ abgebildet wird.

Beweis: Nach H. Grauert [16] gibt es zu einer singularitätenfreien Hyperfläche H_3^5, die die Gerade g enthält, einen komplexen Raum B und eine holomorphe Abbildung τ mit den angegebenen Eigenschaften genau dann, wenn

---

[19]) Für $d = 2$ sind nach Folgerung 1.14 für B beliebige (normale) komplexe Räume erlaubt.

das Normalbündel $\nu(g)$ von g in H_3^5 *schwach negativ* ist[20]). Nun ist $\nu(g)$ sicher dann schwach negativ, wenn es zur direkten Summe $\lambda_1 \oplus \lambda_2$ zweier Hopfscher Geradenbündel λ_1, λ_2 über g isomorph ist[21]). Daher folgt die Behauptung des Satzes 4.1 unmittelbar aus dem weiter unten formulierten und bewiesenen Satz 4.2.

Bemerkung: Bereits in [14] wurde eine dreidimensionale projektiv-algebraische Mannigfaltigkeit X_3, nämlich ein $P_1 \times P_1$-Bündel über P_1, so auf einen normalen komplexen Raum B holomorph abgebildet, daß eine in X_3 enthaltene singularitätenfreie rationale Kurve K auf einen einzigen Punkt $b_0 \in B$ und $X_3 - K$ biholomorph auf $B - b_0$ abgebildet wird. Es gilt indessen $b_1(X_3) = 0$, $b_2^a(X_3) > 1$, $b_4^a(X_3) > 1$, und B ist projektiv-algebraisch. Im vorliegenden Fall der Hyperfläche H_3^5 dagegen haben wir $b_1(H_3^5) = 0$, $b_2(H_3^5) = b_4(H_3^5) = 1$; und B ist nicht einmal algebraisch im Sinne von A. Weil, da alle Divisoren in B durch den Punkt $\tau(g) \in B$ gehen müssen (denn alle Divisoren in H_3^5 schneiden wegen $b_4(H_3^5) = 1$ notwendig die Gerade g[22]).

---

[20]) Ist M eine singularitätenfreie komplexe Untermannigfaltigkeit einer komplexen Mannigfaltigkeit X, so ist das Normalbündel $\nu(M)$ von M in X wie folgt definiert: sind $\xi(X)$ bzw. $\xi(M)$ die kontravarianten holomorphen Tangentialbündel an X bzw. M, so ist $\xi(M)$ ein holomorphes Teilbündel von $\xi(X)|M$ (= Beschränkung von $\xi(X)$ auf M). Das holomorphe Quotientenbündel $\xi(X)|M/\xi(M)$ heißt das Normalbündel $\nu(M)$ von M in X; $\nu(M)$ ist ein holomorphes Vektorraumbündel über M mit $C_{\operatorname{codim} M}$ als typischer Faser (vgl. auch [18], p. 71). — Ein holomorphes Vektorraumbündel φ über einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X heißt schwach negativ (vgl. [16]), wenn es um die Nullschnittfläche 0 im Bündelraum eine Umgebung mit streng pseudokonvexem Rand gibt. Die Whitneysche Summe schwach negativer holomorpher Vektorraumbündel ist wieder schwach negativ, ebenso ist jedes holomorphe Untervektorraumbündel eines schwach negativen Vektorraumbündels schwach negativ.

[21]) Jedes holomorphe Geradenbündel η über einer singularitätenfreien algebraischen Kurve K wird bekanntlich von einem Divisor d der Kurve induziert; es gibt stets meromorphe Schnittflächen in η; jede meromorphe Schnittfläche in η hat d als Divisor. Der Grad von d werde mit $c(\eta)$ bezeichnet; dann gilt für die erste Chernsche Klasse $c_1(\eta)$ die Identität $c_1(\eta) = c(\eta) \cdot q$, wo $q \in H^2(K, Z)$ der natürliche Generator ist (vgl. hierzu [18]). Ist K rational, so sind zwei holomorphe Geradenbündel η, η' über K genau dann äquivalent, wenn $c(\eta) = c(\eta')$. Ein holomorphes Geradenbündel η über einer rationalen Kurve K heißt ein Hopfsches Geradenbündel über K, falls $c(\eta) = -1$. Jedes Hopfsche Geradenbündel ist schwach negativ.

[22]) Nach Hironaka gibt es bereits singularitätenfreie rationale Flächen F, die eine singularitätenfreie (nicht rationale) algebraische Kurve K enthalten, so daß $F - K$ durch Adjunktion eines einzigen Punktes q_0 zu einem kompakten komplexen Raum $\widetilde{F}$ wird, dessen Körper der meromorphen Funktionen zum Körper der meromorphen Funktionen in F kanonisch isomorph ist, und in dem alle analytischen Kurven durch q_0 gehen. Man wählt zunächst eine singularitätenfreie elliptische Kurve K' im P_2 und darauf 10 Punkte $p_1, \ldots, p_{10} \in K'$, so daß bezüglich der kanonischen Gruppenstruktur auf K' niemals eine Gleichung $\sum_{i=1}^{10} n_i p_i = 0$ mit ganz-rationalen Zahlen $n_1, \ldots, n_{10}$ gilt. Die gesuchte Fläche F entsteht nun aus dem P_2 durch Anwendung des σ-Prozesses in den Punkten $p_1, \ldots, p_{10}$; die gesuchte Kurve K in F ist die nach F „geliftete" Kurve K'. Die Möglichkeit, $F - K$ durch Hinzufügung eines einzigen Punktes q_0 zu kompaktieren, folgt aus dem Grauertschen Satze, da K den Selbstschnitt -1 hat. Die Tatsache, daß in $\widetilde{F} = (F - K) \cup q_0$ alle analytischen Kurven durch q_0 gehen, folgt aus klassischen Sätzen über ebene elliptische Kurven auf Grund der an die Punkte $p_1, \ldots, p_{10}$ gestellten Bedingung.

Wir haben den Beweis von Satz 4.1 reduziert auf

Satz 4.2: Durch jede Gerade g im P_4 gibt es eine singularitätenfreie Hyperfläche 5. Ordnung H_3^5 des P_4, so daß das Normalbündel $\nu(g)$ von g in H_3^5 zur direkten Summe $\lambda_1 \oplus \lambda_2$ zweier Hopfscher Geradenbündel λ_1, λ_2 über g isomorph ist.

Dem Beweis dieses Satzes schicken wir vier Hilfssätze voraus:

Hilfssatz 4.3: Es seien X, Y komplexe Räume; es sei $\tau: X \to Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung von X auf Y, derart, daß alle Fasern von τ irreduzibel und gleichdimensional sind. Dann ist für jede analytische Menge M in X, $M \neq X$, die Menge $Y_M := \{y \in Y, \overset{-1}{\tau}(y) \subset M\}$ eine echte analytische Teilmenge von Y.

Beweis: Es sei k die Dimension der Fasern von τ. Die Menge

$$B := \{x \in M, \dim_x(\overset{-1}{\tau}(\tau(x)) \cap M) \geq k\}$$

ist nach Satz 17 von [27], angewandt auf die Abbildung $\tau | M$, eine analytische Menge in M und also auch in X. Da τ eigentlich abbildet, so ist also $\tau(B)$ eine analytische Menge in Y mit $\dim \tau(B) \leq \dim B - k$. Da $\dim Y = \dim X - k$ und $\dim B < \dim X$ wegen $B \neq X$, so folgt $\dim \tau(B) < \dim Y$, d. h. $\tau(B) \neq Y$. Es bleibt zu zeigen, daß $\tau(B) = Y_M$.

Sei $y \in Y_M$ und $x \in \overset{-1}{\tau}(y)$. Wegen $\overset{-1}{\tau}(y) \subset M$ gilt $x \in M$ und $\dim_x(\overset{-1}{\tau}(y) \cap M) = \dim_x \overset{-1}{\tau}(y) = k$, d. h. $x \in B$. Also folgt $Y_M \subset \tau(B)$. Sei umgekehrt $x \in B$. Dann gilt $\dim_x(\overset{-1}{\tau}(\tau(x)) \cap M) = \dim_x \overset{-1}{\tau}(\tau(x))$, woraus wegen der Irreduzibilität von $\overset{-1}{\tau}(\tau(x))$ auf Grund des Identitätssatzes für analytische Mengen folgt $\overset{-1}{\tau}(\tau(x)) \subset M$, d. h. $\tau(x) \in Y_M$. Also gilt auch $\tau(B) \subset Y_M$, w. z. b. w.

Hilfssatz 4.4: Es seien y_{hij}, $h = 0, 1, 2$; $i, j = 0, 1, 2, 3, 4$, $i + j = 4$, homogene Koordinaten im P_{14}, es seien u_0, u_1, u_2 bzw. λ, μ homogene Koordinaten im P_2 bzw. P_1. Dann gibt es eine nichtleere offene Menge $U \subset P_{14}$, so daß durch die Gleichungen

$$(*) \qquad u_0 = \sum_{i+j=4} y_{0ij} \lambda^i \mu^j, \; u_1 = \sum_{i+j=4} y_{1ij} \lambda^i \mu^j, \; u_2 = \sum_{i+j=4} y_{2ij} \lambda^i \mu^j$$

eine holomorphe Abbildung $\varphi: P_1 \times U \to P_2$ gegeben wird mit folgender Eigenschaft:

Für jedes $y \in U$ ist $\varphi_y: P_1 \times y \to P_2$, wo $\varphi_y := \varphi | P_1 \times y$, eine holomorphe Abbildung vom Grade 1 von $P_1 \times y$ auf eine irreduzible Kurve 4. Ordnung mit 3 gewöhnlichen Doppelpunkten und keinen weiteren Singularitäten.

Beweis: Zunächst bestätigt man durch Nachrechnen, daß durch die Gleichungen

$$u_0 = \lambda \mu (\lambda^2 - \mu^2), \; u_1 = \lambda \mu (\lambda^2 + \mu^2), \; u_2 = \lambda^4 - \mu^4$$

eine reguläre holomorphe Abbildung $\chi: P_1 \to P_2$ definiert wird, so daß $\chi(P_1)$ eine Kurve 4. Ordnung im P_2 mit drei gewöhnlichen Doppelpunkten und keinen weiteren Singularitäten ist. χ kann in kanonischer Weise mit einer Abbildung $\varphi_{\bar{y}}$, wo $\bar{y} = (\bar{y}_{hij}) \in P_{14}$ ein eindeutig bestimmter Punkt ist, identifiziert werden. Wir wählen nun eine Umgebung V von $\bar{y}$ so klein, daß durch die Gleichungen (*) eine holomorphe Abbildung $\varphi: P_1 \times V \to P_2$ definiert wird. Da die Abbildung

$\varphi_{\bar{y}}$ regulär ist, kann V insbesondere so gewählt werden, daß auch alle Abbildungen φ_y, $y \in V$, regulär sind; dann sind alle Bildmengen $L_y := \varphi_y(P_1 \times y)$, $y \in V$, irreduzible rationale Kurven im P_2 mit lauter singularitätenfreien Zweigen. Alle Abbildungen φ_y, $y \in V$, sind nun vom Abbildungsgrad 1: Ist nämlich Q_y eine Normalisierung von L_y und $\psi_y : Q_y \to L_y$ eine Normalisierende, so gibt es eine holomorphe Abbildung $\tilde{\varphi}_y : P_1 \times y \to Q_y$, so daß $\varphi_y = \psi_y \circ \tilde{\varphi}_y$. Mit φ_y ist auch $\tilde{\varphi}_y$ regulär und daher, da Q_y als komplexe Mannigfaltigkeit ein P_1 ist, biholomorph.

Wir können V weiter so klein wählen, daß alle Kurven L_y, $y \in V$, von 4. Ordnung sind: Die Schnittpunkte einer Geraden $h := \{A_0 u_0 + A_1 u_1 + A_2 u_2 = 0\}$ mit L_y sind nämlich genau die φ_y-Bilder der vier Wurzeln (λ, μ) der homogenen Polynomgleichung $\sum_{i+j=4} (A_0 y_{0ij} + A_1 y_{1ij} + A_2 y_{2ij}) \lambda^i \mu^j = 0$. Für $\bar{y} = (\bar{y}_{hij})$ kann man nun $(A_0, A_1, A_2) \neq (0, 0, 0)$ so wählen, daß diese Wurzeln $(\bar{\lambda}_\nu, \bar{\mu}_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, 4$, als Punkte des P_1 alle verschieden sind, und daß $L_{\bar{y}}$ die Gerade h in den Bildpunkten $\varphi_{\bar{y}}(\bar{\lambda}_\nu, \bar{\mu}_\nu)$ stets transversal schneidet, $\nu = 1, \ldots, 4$. Dann bleiben aus Stetigkeitsgründen auch für alle zu $\bar{y}$ benachbarten Punkte $y \in P_{14}$ die vier Wurzeln des obigen Polynoms sämtlich voneinander verschieden, und die Schnitte von L_y mit h in den entsprechenden φ_y-Bildpunkten bleiben transversal. Mithin sind alle zu $L_{\bar{y}}$ benachbarten Kurven L_y ebenfalls von der Ordnung 4.

Es seien nun d_1, d_2, d_3 die Doppelpunkte von $L_{\bar{y}}$. Hilfssatz 4.4 wird bewiesen sein, wenn wir zeigen können:

Es gibt eine Umgebung $U \subset V$ von $\bar{y}$ und paarweise disjunkte Umgebungen T_i von d_i, $i = 1, 2, 3$, mit folgender Eigenschaft: Zu jeder Menge $L_y \cap T_i$, $y \in U$, $i = 1, 2, 3$ existieren ein Punkt $q_{i,y} \in T_i$ und zwei durch $q_{i,y}$ laufende, in $q_{i,y}$ singularitätenfreie analytische Kurvenstücke $K'_{i,y}$, $K''_{i,y}$, die zu den irreduziblen Komponenten von $L_y \cap T_i$ in $q_{i,y}$ gehören und sich in $q_{i,y}$ transversal schneiden.

Hieraus folgt nämlich zunächst, daß jede Kurve L_y, $y \in U$, mindestens die drei Punkte $q_{1,y}$, $q_{2,y}$, $q_{3,y}$ als singuläre Punkte besitzt. Nach einer bekannten Formel über irreduzible ebene algebraische Kurven (vgl. [34], Theorem 4.4, p. 65) sind dies dann, da alle Kurven L_y, $y \in U$, von 4. Ordnung sind, genau die singulären Punkte von L_y, und zwar haben sie sämtlich die Vielfachheit 2. Dies bedeutet aber, daß L_y in einer Umgebung von $q_{i,y}$ mit der Menge $K'_{i,y} \cup K''_{i,y}$ übereinstimmt, $i = 1, 2, 3$. Daher sind alle Punkte $q_{i,y}$ gewöhnliche Doppelpunkte von L_y, $y \in U$.

Es bleibt die obige Aussage zu beweisen. Wir wählen in $d_1 \in P_2$ zentrierte komplexe Koordinaten z_1, z_2 so, daß $L_{\bar{y}}$ in einer Polyzylinderumgebung $\tilde{T}_1 := \{|z_1| < \tilde{r}_1, |z_2| < \tilde{r}_2\}$ durch die Gleichung $z_1 \cdot z_2 = 0$ gegeben wird. Sei nun $a_1 \in P_1$ einer der beiden $\varphi_{\bar{y}}$-Urbilder von d_1, sei $U_1 \subset V$ eine Umgebung von $\bar{y} \in P_{14}$ und W_1 eine Koordinatenumgebung von a_1 mit einer in a_1 zentrierten komplexen Koordinate t_1, so daß $\varphi(W_1 \times U_1) \subset \tilde{T}_1$. Dann wird die Abbildung $\varphi : W_1 \times U_1 \to \tilde{T}_1$ durch zwei Gleichungen

$$z_1 = f(t_1, y), \; z_2 = g(t_1, y)$$

mit in $W_1 \times U_1$ holomorphe Funktionen f, g gegeben. Es gelte etwa $f(t_1, \bar{y}) = 0$ (d. h. wir nehmen an, daß $W_1 \times \bar{y}$ vermöge $\varphi_{\bar{y}}$ auf das Ebenenstück $z_1 = 0$, welches einen Zweig von $L_{\bar{y}}$ in d_1 repräsentiert, abgebildet wird). Da $\varphi_{\bar{y}}$ regulär in $t_1 = 0$ ist, so folgt: $\left.\frac{dg(t_1, \bar{y})}{dt_1}\right|_{t_1=0} \neq 0$. Es gibt daher ein $r_2' > 0$, $r_2' < \bar{r}_2$, und eine in $\{|z_2| < r_2'\} \times U_1$ holomorphe Funktion $h(z_2, y)$, so daß $z_2 \equiv g(h(z_2, y), y)$ und $h(z_2, y) \in W_1$ für alle $(z_2, y) \in \{|z_2| < r_2'\} \times U_1$ (evtl. ist das obige U_1 hier noch zu verkleinern). Die zusammengesetzte Funktion $F(z_2, y) := f(h(z_2, y), y)$ ist nun in $\{|z_2| < r_2'\} \times U_1$ holomorph und es gilt $F(z_2, \bar{y}) \equiv 0$. Durch die Gleichung $z_1 - F(z_2, y) = 0$ wird für jedes feste $y \in U_1$ eine in $T_1' := \{|z_1| < \bar{r}_1, |z_2| < r_2'\}$ singularitätenfreie analytische Menge $K_{1,y}'$ beschrieben, die in jedem ihrer Punkte mit einer Komponente von L_y in diesem Punkte übereinstimmt. Die vorstehende Konstruktion werde nun in analoger Weise für den zweiten $\varphi_{\bar{y}}$-Urbildpunkt von d_1 durchgeführt. Dann erhalten wir (nach evtl. nochmaliger Verkleinerung von U_1) eine Umgebung $T_1'' := \{|z_1| < r_1'', |z_2| < \bar{r}_2\}$ und eine in $\{|z_1| < r_1''\} \times U_1$ holomorphe Funktion $G(z_1, y)$ (es gilt $G(z_1, \bar{y}) \equiv 0$), so daß durch die Gleichung $z_2 - G(z_1, y) = 0$ für jedes feste $y \in U_1$ eine in T_1'' singularitätenfreie analytische Menge $K_{1,y}''$ beschrieben wird, die ebenfalls in jedem ihrer Punkte mit einer Komponente von L_y in diesem Punkte übereinstimmt.

Es sei nun T_1 eine relativ-kompakt in $T_1' \cap T_1''$ liegende Umgebung von d_1. Durch die Gleichungen $z_1 - F(z_2, y) = 0$, $z_2 - G(z_1, y) = 0$ wird in $T_1 \times U_1$ eine analytische Menge M definiert, die in $(0, 0, \bar{y})$ genau 2-codimensional ist. Da $M \cap \{T_1 \times \bar{y}\}$ nur aus dem Punkt $(0, 0, \bar{y})$ besteht, so ist, falls U_1 klein genug gewählt ist, die natürliche Projektion $T_1 \times U_1 \to U_1$ surjektiv. Dies bedeutet, daß für jedes $y \in U_1$ die Menge $K_{1,y}' \cap K_{1,y}'' \cap T_1$ mindestens einen Punkt $q_{1,y}$ enthält. In diesem Punkt haben, wenn nur U_1 genügend klein ist, $K_{1,y}'$ und $K_{1,y}''$ notwendig verschiedene Tangenten: Die Punkte $(z_1, z_2, y) \in \in (T_1' \cap T_1'') \times U_1$, in denen $K_{1,y}'$ und $K_{1,y}''$ dieselbe Tangente haben, liegen nämlich auf der durch die Gleichung $\frac{\partial F}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial G}{\partial z_1} = 1$ in $(T_1' \cap T_1'') \times U_1$ definierten analytischen Menge N. Da $\frac{\partial F}{\partial z_2}(z_2, \bar{y}) = \frac{\partial G}{\partial z_1}(z_1, \bar{y}) = 0$, so ist also $N \cap (T_1 \times U_1)$ leer, wenn U_1 klein genug gewählt ist, denn T_1 liegt relativ-kompakt in $T_1' \cap T_1''$.

In derselben Weise können wir nun zu den übrigen beiden Doppelpunkten d_2 und d_3 Umgebungen U_2, U_3, T_2, T_3 und analytische Kurvenstücke $K_{2,y}'$, $K_{2,y}''$, $K_{3,y}'$, $K_{3,y}''$ konstruieren, denen die gleichen Eigenschaften zukommen wie oben den $U_1, T_1, K_{1,y}', K_{1,y}''$. Wir können sicher erreichen, daß die T_1, T_2, T_3 paarweise disjunkt sind. Setzt man daher abschließend $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$, so ist die Existenz der oben behaupteten Mengen sichergestellt. — Hilfssatz 4.4 ist folglich bewiesen.

Im P_4 seien eine Gerade g und eine 2-dimensionale analytische Ebene E gegeben, so daß $g \cap E$ leer ist. Es sei $\alpha : g \to E$ eine holomorphe Abbildung. Ordnen wir dann jedem Punkt $p \in g$ die abstrakte Tangentialgerade $\tilde{a}_p$ in p an die durch p und seinen Bildpunkt $\alpha(p) \neq p$ bestimmte projektive Gerade zu, so ist ein holomorphes Geradenbündel über g definiert. Dasselbe wird im folgenden stets mit η_α bezeichnet; $\bigcup_{p \in g} \tilde{a}_p$ ist eine „Realisierung" von η_α. Ist z. B.

α konstant, so ist η_α ersichtlich das Normalbündel von g in der durch die Gerade g und dem Punkt $\alpha(g)$ aufgespannten Ebene, in diesem Falle gilt also $c(\eta_\alpha) = 1$.

Im folgenden Hilfssatz geben wir eine Abschätzung für $c(\eta_\alpha)$ für beliebige nicht konstante holomorphe Abbildungen α.

Hilfssatz 4.5: Es seien g bzw. E eine Gerade bzw. Ebene im P_4 mit leerem Durchschnitt, es sei $\alpha : g \to E$ eine holomorphe Abbildung vom Grade $h > 0$ auf eine algebraische Kurve $\alpha(g) \subset E$ der Ordnung k. Dann gilt $c(\eta_\alpha) \leqq 1 - hk$ für das von α über g definierte holomorphe Geradenbündel η_α[23]).

Beweis: Es sei $s : p \to s_p$ eine feste meromorphe Schnittfläche in η_α. Laut Definition ist $c(\eta_\alpha) = \mathrm{grad}(s)$. Um diese Zahl abzuschätzen, konstruieren wir ein Hilfsbündel ω über g, indem wir jedem Punkt $p \in g$ den 3-dimensionalen abstrakten Tangentialraum an den von p und E aufgespannten 3-dimensionalen projektiven Unterraum des P_4 zuordnen. ω ist ein holomorphes Vektorraumbündel über g mit η_α als holomorphem Teilbündel. Sind q_1, q_2, q_3 drei feste nicht kollineare Punkte in E, so bestimmt jede Abbildung $p \to q_i$, $p \in g$, ein holomorphes Geradenbündel ξ_i über g mit $c(\xi_i) = 1$, $i = 1, 2, 3$, so daß gilt $\omega = \xi_1 \oplus \oplus\, \xi_2 \oplus \xi_3$. Wir bezeichnen die projektive Gerade durch q_2 und q_3 mit t und wählen q_2, q_3 insbesondere so, daß t die Kurve $\alpha(g)$ in k verschiedenen Punkten schneidet und daß jeder Punkt von $t \cap \alpha(g)$ genau h verschiedene α-Urbildpunkte in g hat. Die Menge $N := \overset{-1}{\alpha}(t)$ besteht dann aus hk verschiedenen Punkten, ersichtlich gilt auch $N = \{p \in g,\ s_p \in \xi_2(p) \oplus \xi_3(p)\}$. Wir können t auch noch so wählen, daß die oben fixierte Schnittfläche s in N weder Null- noch Polstellen hat. Wir projizieren nun die Schnittfläche s des Bündelraumes $\eta_\alpha \subset \xi_1 \oplus \xi_2 \oplus \xi_3$ auf den Bündelraum ξ_1. Dadurch wird eine meromorphe Schnittfläche $\tilde{s}$ in ξ_1 definiert. Da jeder Punkt $p \in g - N$ eine Umgebung U besitzt, so daß $\eta_\alpha | U$ sich biholomorph auf $\xi_1 | U$ projiziert, so hat $\tilde{s}$ über $g - N$ genau dort Null- bzw. Polstellen (mit derselben Vielfachheit), wo s Null- bzw. Polstellen hat. Da s über N nach Voraussetzung weder verschwindet noch singulär wird, und $\tilde{s}$ in jedem Punkt von N laut Definition null wird, so folgt also: $\mathrm{grad}(\tilde{s}) \geqq \mathrm{grad}(s) + hk$. Wegen $c(\xi_1) = \mathrm{grad}(\tilde{s}) = 1$ und $c(\eta_\alpha) = \mathrm{grad}(s)$ ergibt sich hieraus die Behauptung.

Hilfssatz 4.6: Es sei H_3^q eine singularitätenfreie Hyperfläche im P_4, es sei K eine singularitätenfreie algebraische Kurve in H_3^q der Ordnung a und vom Geschlecht p. Dann gilt für das Normalbündel $\nu(K)$ von K in H_3^q die Gleichung

$$c(\nu(K)) = (5 - q)\, a + 2p - 2\,.$$

Beweis: Es seien $i : H_3^q \to P_4$ und $j : K \to H_3^q$ die natürlichen Injektionen, es seien $e \in H^2(P_4, Z)$ und $f \in H^2(K, Z)$ die natürlichen Generatoren dieser Gruppen. Aus der Whitneyschen Multiplikationsformel für Chernsche Klassen (vgl. [18], p. 66) ergibt sich, wenn wir mit $\nu(H_3^q)$ das Normalbündel von H_3^q in P_4 bezeichnen:

$$i^*(c_1(P_4)) = c_1(\nu(H_3^q)) + c_1(H_3^q)\,, \quad j^*(c_1(H_3^q)) = c_1(\nu(K)) + c_1(K)\,.$$

[23]) Es läßt sich sogar zeigen: $c(\eta_\alpha) = 1 - hk$. Für unsere Zwecke genügt indessen die obige Ungleichung.

Ferner gilt (vgl. [18], p. 73, 71 bzw. p. 73):

$$c_1(P_4) = 5e\,, \quad c_1(\nu(H_3^q)) = i^*(qe)\,, \quad c_1(K) = (2-2p)f\,.$$

Also folgt: $c_1(H_3^q) = i^*((5-q)e)$ und weiter

$$c_1(\nu(K)) = (5-q)\,(i \circ j)^*(e) - (2-2p)f\,.$$

Da $(i \circ j)^*(e) = af$, so ergibt sich schließlich

$$c_1(\nu(K)) = \{(5-q)a + 2p - 2\}f\,,$$

woraus die Behauptung folgt.

Wir beweisen nun abschließend Satz 4.2. Es seien $x_0, \ldots, x_4$ homogene Koordinaten im P_4, so daß die Gerade g durch die Gleichungen $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ gegeben wird. Eine Hyperfläche $H_3^5 = \left\{ \sum_{j_0+\cdots+j_4=5} a_{j_0 \ldots j_4} x_0^{j_0} \cdots x_4^{j_4} = 0 \right\}$ enthält g genau dann, wenn $a_{000ij} = 0$ für alle zulässigen i, j. Im Raum P_{125} aller Hyperflächen H_3^5 des P_4 repräsentiert also (bezüglich der homogenen Koordinaten $a_{j_0 \ldots j_4}$) der durch die Gleichungen $a_{000ij} = 0$ bestimmte 119-dimensionale lineare Teilraum L_{119} die g enthaltenden Hyperflächen. Bezeichnet S die im P_{125} algebraische Menge der Hyperflächen H_3^5 mit Singularitäten, so gilt $L_{119} \not\subset S$: andernfalls müßte nämlich (aus Homogenitätsgründen) jede Hyperfläche H_3^5 des P_4, die eine Gerade enthält, Singularitäten haben, was Satz 2.5 widerspricht. Wir setzen im folgenden $S^* := L_{119} \cap S$.

Sei nun $H_3^5 \in L_{119} - S^*$ beliebig gewählt. Der projektive Tangentialraum T_p an H_3^5 in einem Punkt $p = (0, 0, 0, \lambda, \mu) \in g$ wird dann, wie eine direkte Rechnung zeigt, durch die Gleichung

$$(1) \qquad x_0 \sum_{i+j=4} a_{100ij} \lambda^i \mu^j + x_1 \sum_{i+j=4} a_{010ij} \lambda^i \mu^j + x_2 \sum_{i+j=4} a_{001ij} \lambda^i \mu^j = 0$$

gegeben. Wir setzen $\vartheta(H_3^5) := (a_{10040}, a_{10031}, \ldots, a_{00104})$ und behaupten:

Es gibt im P_{14} der homogenen Koordinaten $(a_{10040}, \ldots, a_{00104})$ eine algebraische Menge $A \neq P_{14}$, so daß zu jedem Punkt $a \in P_{14} - A$ eine Hyperfläche $'H_3^5 \in L_{119} - S^*$ mit $\vartheta('H_3^5) = a$ existiert.

Zum Beweise bezeichnen wir mit E_{104} den durch die Gleichungen $a_{10040} = 0, \ldots, a_{00104} = 0$ definierten linearen Unterraum des L_{119} (es gilt $E_{104} \subset S^*$) und betrachten diejenige holomorphe Abbildung $\pi: L_{119} - E_{104} \to P_{14}$, die jedem Punkt $(a_{j_0 \ldots j_4}) \in L_{119} - E_{104}$ den Punkt $(a_{10040}, \ldots, a_{00104}) \in P_{14}$ zuordnet. Durch Anwendung des σ-Prozesses entlang E_{104} entsteht aus L_{119} eine komplexe Mannigfaltigkeit $\tilde{L}_{119}$, so daß die Abbildung π zu einer holomorphen Abbildung $\tilde{\pi}: \tilde{L}_{119} \to P_{14}$ geliftet werden kann, wobei jede Faser von $\tilde{\pi}$ ein P_{105} ist (vgl. Hilfssatz 2.2). Bezeichnet $\sigma: \tilde{L}_{119} \to L_{119}$ die natürliche Projektion, so gilt $\vartheta(H_3^5) = \tilde{\pi} \circ \overset{-1}{\sigma}(H_3^5)$ für alle Hyperflächen $H_3^5 \in L_{119} - S^*$. Die Menge $\overset{-1}{\sigma}(S^*)$ ist eine echte algebraische Teilmenge von $\tilde{L}_{119}$. Wir setzen nun $A := \{a \in P_{14}, \tilde{\pi}^{-1}(a) \subset \overset{-1}{\sigma}(S^*)\}$. Da alle Fasern von $\tilde{\pi}$ irreduzibel sind, so ist A nach Hilfssatz 4.3 eine echte analytische und also algebraische Teilmenge von P_{14}. Zu jedem Punkt $a \in P_{14} - A$ gibt es ein $b \notin \overset{-1}{\sigma}(S^*)$ mit $\tilde{\pi}(b) = a$.

Folglich ist $'H_3^5 := \sigma(b) \in L_{119} - S^*$ eine „Hyperfläche" mit $\vartheta('H_3^5) = a$. Die Menge A hat also die gewünschte Eigenschaft. — Im folgenden betrachten wir nur Hyperflächen $H_3^5 \in L_{119} - S^*$ mit $\vartheta(H_3^5) \notin A$.

Es sei E die durch die Gleichungen $\{x_3 = x_4 = 0\}$ im P_4 definierte 2-dimensionale Ebene. Es gilt $E \cap g = \emptyset$, weiter ist $E \cap T_p$ für alle $p = (\lambda, \mu) \in g$ stets eine Gerade g_p, die durch die Gleichungen (1) gegeben wird, falls man x_0, x_1, x_2 als homogene Koordinaten in E auffaßt. Durch die Zuordnung $p \to g_p$ wird für jeden Punkt $(a_{10040}, \ldots, a_{00104}) \in P_{14} - A$ eine holomorphe Abbildung $\varphi: g \to E^*$ von g in den zu E dualen Raum E^* der Geraden von E definiert; sind u_0, u_1, u_2 zu x_0, x_1, x_2 duale homogene Koordinaten in E^*, so wird φ ersichtlich durch die Gleichungen:

$$(2) \qquad u_0 = \sum_{i+j=4} a_{100ij}\lambda^i\mu^j, \quad u_1 = \sum_{i+j=4} a_{010ij}\lambda^i\mu^j, \quad u_2 = \sum_{i+j=4} a_{001ij}\lambda^i\mu^j$$

gegeben. Aus Hilfssatz 4.4 folgt, daß man den Punkt $(a_{10040}, \ldots, a_{00104}) \in P_{14} - A$ insbesondere so wählen kann, daß $\varphi(g)$ eine Kurve 4. Ordnung mit 3 gewöhnlichen Doppelpunkten und keinen weiteren Singularitäten ist, und daß φ eine holomorphe Abbildung von g auf $\varphi(g)$ vom Grade 1 ist. Wir zeigen nun, daß für jede zu einem solchen Punkt a' von $P_{14} - A$ gehörende Hyperfläche $'H_3^5 \in L_{119} - S^*$ mit $\vartheta('H_3^5) = a'$ die Aussage unseres Satzes gilt.

Für jeden Punkt $p \in g$ sei n_p die von der Geraden g_p und dem Punkt p bestimmte 2-dimensionale projektive Ebene. Es ist $n_p \subset T_p$ und $n_p \cap g = p$ für alle $p \in g$. Daher gilt, wenn wir mit $\tilde{T}_p$ bzw. $\tilde{n}_p$ bzw. $\tilde{t}_p$ den abstrakten Tangentialraum in p an H_3^5 bzw. n_p bzw. g bezeichnen: $\tilde{T}_p = \tilde{t}_p \oplus \tilde{n}_p$ für alle $p \in g$. Somit ist $\bigcup_{p \in g} \tilde{n}_p$ eine „Realisierung" des Normalbündels $\nu(g)$ von g in H_3^5. Jede holomorphe Abbildung $\alpha: g \to E$ bestimmt (vgl. die Vorbemerkung zu Hilfssatz 4.4) ein holomorphes Geradenbündel η_α über g. Gilt stets $\alpha(p) \in g_p$, so kann η_α offensichtlich als ein holomorphes Teilbündel von $\nu(g)$ aufgefaßt werden. Hat man insbesondere 2 holomorphe Abbildungen $\alpha_i: g \to E$ mit $\alpha_i(p) \in g_p$ für alle $p \in g$, $i = 1, 2$, so daß stets $\alpha_1(p) \neq \alpha_2(p)$, so ist $\nu(g)$ die direkte Summe der zugehörigen Geradenbündel η_{α_1} und η_{α_2}. Wir werden nun zwei solche Abbildungen α_1 und α_2 so konstruieren, daß die zugehörigen Geradenbündel η_{α_i} beide Hopfsche Geradenbündel über g sind; damit ist dann Satz 4.2 bewiesen.

Es seien d_1, d_2 zwei der 3 Doppelpunkte von $\varphi(g)$. Für jeden Punkt $p \in g$ mit $g_p = \varphi(p) \neq d_1, d_2$ sei zunächst $\bar{\alpha}_i(p)$ die projektive Gerade durch $\varphi(p)$ und d_i in E^*, $i = 1, 2$. Es gilt stets $\bar{\alpha}_1(p) \neq \bar{\alpha}_2(p)$, denn andernfalls wäre die Schnittzahl der Geraden $\bar{\alpha}_1(p)$ mit der Kurve 4. Ordnung $\varphi(g)$ mindestens 5. $\bar{\alpha}_i(p)$ ist ein Punkt in E^{**}; wir setzen daher $\alpha_i(p) := \varrho(\bar{\alpha}_i(p))$, $i = 1, 2$, wo ϱ die kanonische „bilineare" Abbildung von E^{**} auf E ist. Offensichtlich ist $\alpha_i: p \to \alpha_i(p)$ eine holomorphe Abbildung von $g - \overset{-1}{\varphi}(d_1 \cup d_2)$ in E; da stets $\varphi(p) = g_p \in \bar{\alpha}_i(p)$, so gilt $\alpha_i(p) \in g_p$, $i = 1, 2$. α_1 und α_2 können stetig und daher auch holomorph in die 4 Punkte von $\overset{-1}{\varphi}(d_1 \cup d_2)$ fortgesetzt werden: ist etwa $p' \in g$ mit $\varphi(p') = d_1$, so sei $\bar{\alpha}_1(p')$ die Tangente an den durch $\varphi(p')$ bestimmten Zweig von $\varphi(g)$ in d_1 und $\bar{\alpha}_2(p')$ die Verbindungsgerade von d_1 mit d_2 und weiter

$\alpha_i(p') := \varrho(\bar{\alpha}_i(p'))$, $i = 1, 2$. Aus gleichen Gründen wie oben gilt auch jetzt $\alpha_i(p') \in g_p$ und $\alpha_1(p') \neq \alpha_2(p')$. In entsprechender Weise wird α_i in den beiden φ-Urbildpunkten von d_2 definiert. Für die durch diese holomorphen Abbildungen α_1, α_2 bestimmten Geradenbündel $\eta_{\alpha_1}, \eta_{\alpha_2}$, von denen $\nu(g)$ die direkte Summe ist, haben wir nun zu zeigen, daß $c(\eta_{\alpha_1}) = c(\eta_{\alpha_2}) = -1$. Dazu bemerken wir, daß beide Abbildungen α_1 und α_2 nicht konstant und mindestens vom Grade 2 sind: Die „allgemeine" Gerade durch d_i, $i = 1, 2$, schneidet nämlich die Kurve 4. Ordnung $\varphi(g)$ in genau zwei weiteren von d_i verschiedenen Punkten, mithin besteht $\overset{-1}{\alpha}_i(\alpha_i(p))$ für „allgemeine" Punkte $p \in g$ stets aus mindestens 2 verschiedenen Punkten. Aus Hilfssatz 4.5 ergibt sich somit $c(\eta_{\alpha_1}) \leqq -1$, $c(\eta_{\alpha_2}) \leqq -1$. Aus Hilfssatz 4.6 (man setze $q = 5$, $K = g$ und also $a = 1$, $p = 0$) folgt andererseits auf Grund der dualisierten Whitneyschen Multiplikationsformel

$$c(\eta_{\alpha_1}) + c(\eta_{\alpha_2}) = c(\nu(g)) = -2 .$$

Dies ist aber nur möglich, wenn $c(\eta_{\alpha_1}) = c(\eta_{\alpha_2}) = -1$, w. z. b. w.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß mit derselben Methode, mit der Satz 4.2 bewiesen wurde, sich zeigen läßt:

Durch jede Gerade g im P_4 gibt es eine singularitätenfreie Hyperfläche H_3^q des P_4, $1 \leqq q \leqq 4$, so daß das Normalbündel $\nu(g)$ von g in H_3^q zur direkten Summe $\lambda_1^{(q)} \oplus \lambda_2^{(q)}$ zweier Geradenbündel $\lambda_1^{(q)}, \lambda_2^{(q)}$ über g isomorph ist, wobei: $c(\lambda_1^{(4)}) = 0$, $c(\lambda_2^{(4)}) = -1$; $c(\lambda_1^{(3)}) = 0$, $c(\lambda_2^{(3)}) = 0$; $c(\lambda_1^{(2)}) = 0$, $c(\lambda_2^{(2)}) = 1$; $c(\lambda_1^{(1)}) = 1$, $c(\lambda_1^{(1)}) = 1$.

Literatur

[1] Andreotti, A., and T. Frankel: The Lefschetz theorem on hyperplane sections. Ann. Math. **69**, 713—717 (1959).

[2] Andreotti, A., u. P. Salmon: Anelli con unica decomponibilità in fattori ed un problema di intersezioni complete. Monatsh. Math. Physik. **61**, 97—142 (1957).

[3] Aeppli, A.: Modifikation von reellen und komplexen Mannigfaltigkeiten. Comment. Math. Helv. **31**, 219—300 (1956/57).

[4] Bachmann, P.: Zahlentheorie, 4. Teil: Die Arithmetik der quadratischen Formen. Leipzig: Teubner-Verlag 1898.

[5] Blanchard, A.: Sur les variétés analytiques complexes. Ann. sci. école norm. super. **73**, 157—202 (1956).

[6] Borel, A.: The Poincaré duality in generalized manifolds. Mich. Math. J. **4**, 227—239 (1957).

[7] Bott, R.: On a theorem of Lefschetz. Mich. Math. J. **6**, 211—216 (1959).

[8] Cartan, H.: Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes. Lefschetz Festband, 90—102. Princeton University Press 1957.

[9] Chow, W. L.: On the geometry of algebraic homogeneous spaces. Ann. Math. **50**, 32—67 (1949).

[10] Eckmann, B.: Quelques propriétés globales des variétés kähleriennes. C. R. Acad. Sci. (Paris) **229**, 577—579 (1949).

[11] Ehresmann, Ch.: Sur la topologie de certains espaces homogènes. Ann. Math. **35**, 396—443 (1934).

[12] Ehresmann, Ch.: Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. Colloque de Topologie (Espaces fibrés) 29—55 Bruxelles 1951.

[13] Gherardelli, F.: Sui gruppi dell'equivalenza e della torsione algebrica sulle varietà kähleriane e algebriche. Ann. Mat. pur. appl. **46**, 71—95 (1958).

[14] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Zur Theorie der Modifikationen. I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. Math. Ann. **129**, 274—296 (1955).

[15] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Komplexe Räume. Math. Ann. **136**, 245—318 (1958).

[16] GRAUERT, H.: On point modifications. In Vorbereitung.

[17] HIRZEBRUCH, F.: Der Satz von Riemann-Roch in faisceau-theoretischer Formulierung, einige Anwendungen und offene Fragen. Proc. Inter. Congr. Amsterdam. Vol. III, 457—473 (1954).

[18] HIRZEBRUCH, F.: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Ergebn. Math. N. F., Heft 9. Springer-Verlag 1956.

[19] HODGE, W. V. D., and D. PEDOE: Methods of algebraic geometry. Vol. II, Cambridge University Press 1952.

[20] HOPF, H.: Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. J. reine angew. Math. **163**, 71—88 (1930).

[21] HOPF, H.: Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten. Studies and Essays presented to R. Courant, 167—185. Interscience Publishers New York 1948.

[22] HOPF, H.: Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen vierdimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten. Comment. Math. Helv. **29**, 132—156 (1955).

[23] IGUSA, J.: On Picard varieties attached to algebraic varieties. Am. J. Math. **74**, 1—22 (1952).

[24] KODAIRA, K.: Characteristic linear systems of complete continuous systems. Am. J. Math. **78**, 716—744 (1956).

[25] MATTUCK, A.: Cycles on abelian varieties. Proc. Am. Math. Soc. **9**, 88—98 (1958).

[26] REMMERT, R.: Über stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. Colloque de Topologie, Strasbourg 1954.

[27] REMMERT, R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. **133**, 328—370 (1957).

[28] REMMERT, R., u. K. STEIN: Eigentliche holomorphe Abbildungen. Math. Z. **73**, 159—189 (1960).

[29] SCHUBERT, H.: Die n-dimensionale Verallgemeinerung der Anzahlen für die vielpunktig berührenden Tangenten einer punktallgemeinen Fläche m-ten Grades. Math. Ann. **26**, 52—73 (1886).

[30] SERRE, J. P.: Groupes algébriques et corps de classes. Act. Sci. et Ind. 1264. Paris: Hermann 1959.

[31] STEIN, K.: Analytische Zerlegungen komplexer Räume. Math. Ann. **132**, 63—93 (1956).

[32] VAN DE VEN, A. J. H. M.: Over de homologiestructur van enige typen vezelruimten. Diss. Leiden. Assen: van Gorcum 1957.

[33] VAN DER WAERDEN, B. L.: Zur algebraischen Geometrie II. Die geraden Linien auf den Hyperflächen des P_n. Math. Ann. **108**, 253—259 (1933).

[34] WALKER, R. L.: Algebraic curves. Princeton University Press 1950.

[35] WHITNEY, H.: Elementary structure of real algebraic varieties. Ann. Math. **66**, 545—556 (1957).

(Eingegangen am 23. April 1960)

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH
ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH
FELIX KLEIN · DAVID HILBERT · OTTO BLUMENTHAL · ERICH HECKE

142. BAND

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1961

Springer-Verlag OHG/Berlin · Göttingen · Heidelberg

Printed in Germany

Druck: Brühlsche Universitätsdruckerei Gießen

Inhalt des 142. Bandes

Druck der Brühlschen Universitätsdruckerei Gießen — Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg

Printed in Germany